岐阜大学工学部 解析学 II (Fukuda)

解析学 II 推奨問題

第 3 章　58 頁問 2、61 頁問 3(2)(3)(4)、63 頁問 4、66 頁問 6、68 頁問 7、70 頁問 9、76 頁問 10、80 頁問 11

第 5 章　例 1 から 8 まで、例 9(1)

76 頁　問 10 改題 $y' = \frac{dy}{dx}$ のみ求める。

(1)

$$x^2 e^{y^3} = 4$$

両辺を x で微分して、

$$(x^2)' e^{y^3} + x^2 (e^{y^3})' = 0$$

$$2xe^{y^3} + x^2 e^{y^3} (y^3)' = 0$$

$$2xe^{y^3} + x^2 e^{y^3} 3y^2 y' = 0$$

従って、

$$y' = -\frac{2}{3xy^2}$$

(2)

$$x^3 - 3xy + 3y^2 = 3$$

両辺を x で微分して、

$$3x^2 - (3 \cdot 1 \cdot y + 3xy') + 3 \cdot 2yy' = 0$$

$$x^2 - y - xy' + 2yy' = 0$$

従って、

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - 2y}$$

(3)

$$x - y + \log xy = 0$$

両辺を x で微分して、

$$1 - y' + \frac{1}{xy}(xy)' = 0$$

$$1 - y' + \frac{1}{xy}(1 \cdot y + xy') = 0$$

$$1 - y' + \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} = 0$$

従って、

$$y' = \frac{(1+x)y}{(y-1)x}$$

80 頁　問 11 (3) これが正解です (2008 年春に購入の版にミス)。指摘して下さった方に感謝。

$$z = x^3y + xy^3 - xy$$

$$z_x = 3x^2y + y^3 - y, \quad z_y = 3y^2x + x^3 - x$$

$z_x = z_y = 0$ を解く。$z_x = y(3x^2+y^2-1) = 0$ かつ $z_y = x(3y^2+x^2-1) = 0$ を解く。すると、

$$(x, y) = (0,0), \pm(1,0), \pm(0,1), \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

さて、

$$z_{xx} = 6xy, \quad z_{xy} = 3x^2 + 3y^2 - 1 = z_{yx}, \quad z_{yy} = 6xy$$

よって

$$\mathrm{Hess}(x,y) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}z_{yx} = 36x^2y^2 - (3x^2+3y^2-1)^2$$

$(x,y) = (0,0), \pm(1,0), \pm(0,1)$ のときは、$\mathrm{Hess}(x,y) < 0$ なので z は極値を取らない。$(x,y) = \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ のときは、$\mathrm{Hess}(x,y) > 0$ なので z は極値を取る。より詳細には、$(x,y) = \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ のときは、$z_{xx} > 0$ なので極小値 $z = -\frac{1}{8}$ を取り、$(x,y) = \pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ のときは、$z_{xx} < 0$ なので極大値 $z = \frac{1}{8}$ を取る。

84 頁　問 14 改題 $z' = \frac{dz}{dx} = 0$ となる (x,y) の値の組（z の極値を与える候補者）を求めよ。

(1) 条件式 $xy = 1$ の両辺を x で微分して、

$$y + xy' = 0$$

$$y' = -\frac{y}{x}$$

条件付関数 $z = x^2 + 4y^2$ を x で微分して、

$$z' = 2x + 8yy' = 2x + 8y(-\frac{y}{x}) = \frac{2(x^2 - 4y^2)}{x}$$

$z' = 0$ と条件式を連立させて、$x^2 - 4y^2 = 0$ かつ $xy = 1$ より、$(x, y) = \pm(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

(2) 条件式 $x + 2y = 1$ の両辺を x で微分して、

$$1 + 2y' = 0$$

$$y' = -\frac{1}{2}$$

条件付関数 $z = x^2 + y^2$ を x で微分して、

$$z' = 2x + 2yy' = 2x + 2y(-\frac{1}{2}) = 2x - y$$

$z' = 0$ と条件式を連立させて、$2x - y = 0$ かつ $x + 2y = 1$ より、$(x, y) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$

(3) 条件式 $x^2 + y^2 = 4$ $(x > 0)$ の両辺を x で微分して、

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

条件付関数 $z = xy^3$ を x で微分して、

$$z' = y^3 + 3xy^2y' = y^3 + 3xy^2(-\frac{x}{y}) = y^3 - 3x^2y = y(y^2 - 3x^2)$$

$z' = 0$ と条件式を連立させて、$y(y^2 - 3x^2) = 0$ かつ $x^2 + y^2 = 4$ $(x > 0)$ より、$(x, y) = (1, \pm\sqrt{3}), (2, 0)$