**幾何学III・幾何学演習　コロナ対策第2講　第１章　一筆（ひとふで）書き　(その2)**　20200423版

以上の事をまとめる為に、次の定理と証明を述べる。

**定理（Euler）** 一筆書き可能な連結グラフにおいて、奇点の数は0か2である。

**証明**　（一筆書き可能な連結グラフにおいて、どういう点が奇点になるか考えてみる）

　I．始・終点以外の点について

入ってきた線は必ず出ていく（入った分だけ出る）。出入りする線の総数は偶。

（[出]＋[入] = [出]+[出] = 2×[出]・・・2n の形)　即ち偶点！



　II 始・終点について

　　ここで、更に２つに分けて考察する。

　　II(i) 始点と終点が異なる場合・・・図１（朝出たバスが、夜ちがう車庫に収まる）

　　　　始点；[出]が[入]より１多い。出入り総数は奇。即ち奇点！

（[出]+[入] = ([入]+1)+[入] = 2[入] +1 ・・・2n+1 の形)

　　　　終点；[入]が[出]より１多い。出入り総数は奇。即ち奇点！

　　II(ii) 始点と終点が同じ場合・・・図２（始発バスが、終バスとして戻ってくる）

　　　　始点（兼　終点）；出た線が、必ず戻る（出た分だけ入る）。

[出]と[入]が同じ。出入り総数は偶。

（[出]＋[入] = [入]+[入] = 2×[入]）　即ち偶点！

I. II(i), II(ii) をまとめて、

　　始点と終点が異なるとき、奇点の総数は２・・・始点と終点

　　始点と終点が同じとき、奇点の総数は０　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終

**系**　ケーニヒスベルグの全ての橋を１回ずつ通って回りつくすことは不可能である。

**証明**　ケーニヒスベルグから抽出した連結グラフにおいて、奇点の数は　Quiz　個である。



　もし一筆書き可能だったら、奇点の数は０か２のはずである。これは矛盾！（背理法）

　よって、このグラフは一筆書き不可能である。　　　　　　　　　　　　　　　証明終

Euler（スイス人）は18世紀ケーニヒスベルグを通りがかり、以上の考察をした。