

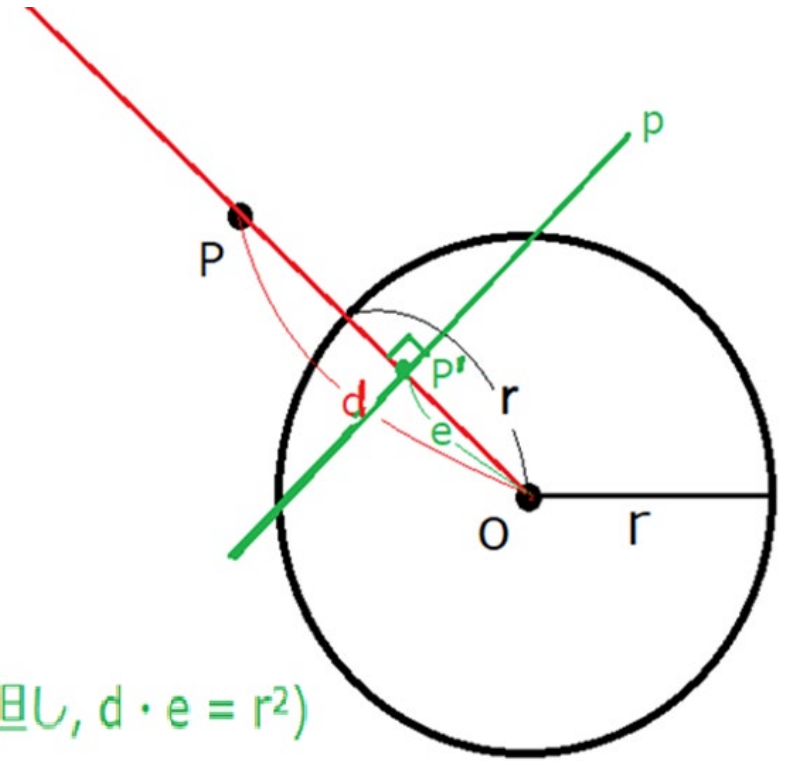
幾何学特論

第13講補講

円Oに関する双対変換（双対点（極）と双対直線（極線））

定義

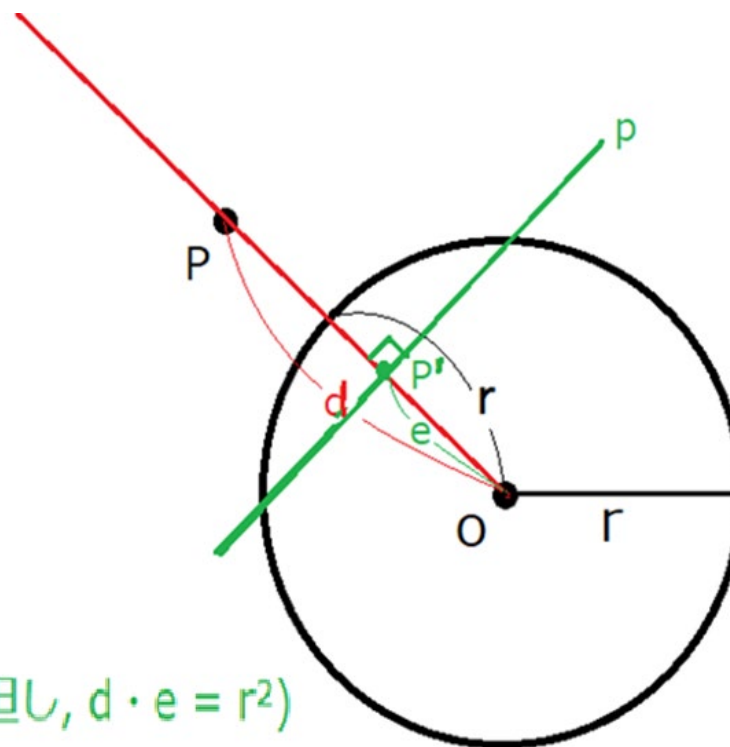
平面上に原点中心、半径 r の円Oがある。



平面上の各点Pに対して。

（OPの長さを d とする。） 半直線OP上に $OP \cdot OP' = r^2$ （即ち $OP' = e$ ）
（但し $d \cdot e = r^2$ ）となる点 P' を採り、 P' でOPと直交する直線 p を考える。
直線 p を（円Oに関する）点Pの双対直線（極線）と言う。

(定義続く)



平面上の直線 p に対して。

O から p に下した垂線の足を P' とする。(OP' の長さを e とする。)

半直線 OP' 上に $OP \cdot OP' = r^2$ (即ち $OP = d$ (但し $d \cdot e = r^2$)) となる点 P を考える。 点 P を (円 O に関する) 直線 p の**双対点** (**極**) という。

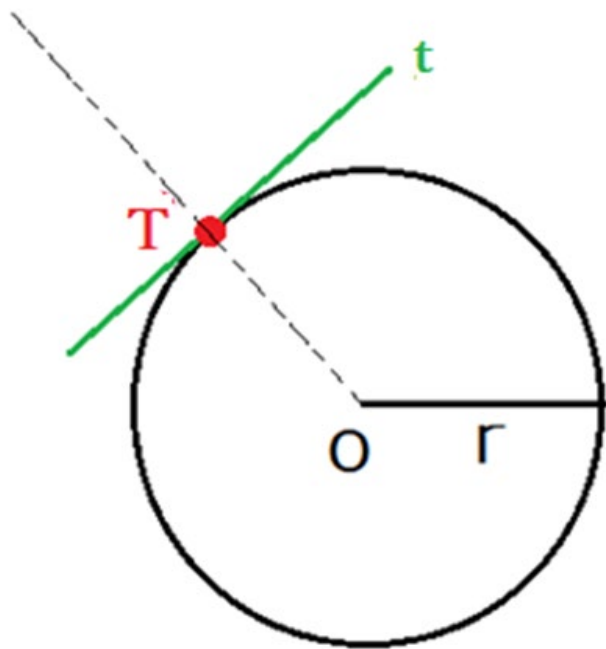
(定義終)

(注) 上の定義より、双対直線と双対点は 1 対 1 に対応する。即ち、
点 P の双対直線が直線 p である $\Leftrightarrow$ 直線 p の双対点が点 P である。

肝 $OP \cdot OP' = r^2$ 半直線 $OP \perp p$ (交点 P')	双対直線 (極線) 点 P $\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$ 直線 p 双対点 (極)
--	--

定理

円 O の周上の点 T での接線 t は、点 T に対する双対直線（極線）である。
円 O の接線 t の接点 T は、直線 t に対する双対点（極）である。



（証明省略）

定理 直線 p が点 A を通るならば、
(A の)双対直線 a は(p の)双対点 P を通る。

(証明省略)

定理 以下、点A（大文字）と直線a（小文字）が相互に変換するとする。

- ① 2点を通る直線は、2点の双対直線の交点に変換する。
つまり、2点A,Bを通る直線ABは、2直線a,bの交点 $a \cap b$ に変換する。
- ② 2直線の交点は、2直線の双対点を通る直線に変換する：
つまり、2直線 ℓ, m の交点 $\ell \cap m$ は、2点L,Mを通る直線LMに変換する。

（証明）

- ① 直線ABを ℓ とする。

直線 ℓ 上が点A,Bを通るので、直前の定理より、直線a,bは点Lを通る。
よって、点Lは交点 $a \cap b$ である。

- ② 2直線 ℓ, m の交点 $\ell \cap m$ をAとする。

直線 ℓ, m が点Aを通るので、直前の定理より、直線aは点L,Mを通る。
よって、直線aは直線LMである。

（証明終）