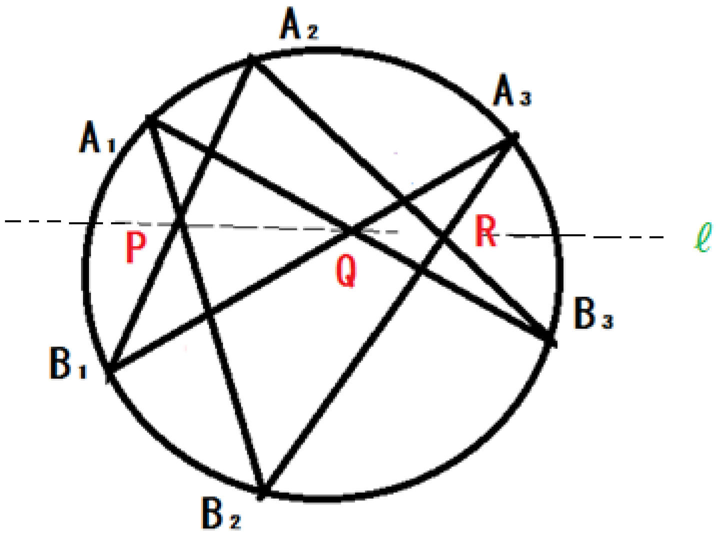
幾何学特論

第14講補講

ＰＡＳＣＡＬの定理（復習）

円Oの周上の6点、A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3をとる。
直線A_1B_2とA_2B_1の交点をP、
直線A_1B_3とA_3B_1の交点をQ、
直線A_2B_3とA_3B_2の交点をR、
とする。
3点 P, Q, Rはある1直線上 $\boldsymbol{\ell}$ にある。



円Oに関する双対変換
というのが存在し、以下の性質が成り立つ。

・点が直線、直線が点に、相互に変換する。
　以下、点A（大文字）と直線a（小文字）が相互に変換するとする。
・円Oの周上の点Tが接線tに、接線tが接点Tに、変換する。
・点を直線が通るならば、双対直線は双対点を通る：
点Aを直線ℓが通るならば、直線aは点Lを通る。
・2点を通る直線は、2点の双対直線の交点に変換する。
2点A,Bを通る直線ABは、2直線a,bの交点a∩bに変換する。
・2直線の交点は、2直線の双対点を通る直線に変換する：
2直線ℓ,mの交点ℓ∩mは、2点L,Mを通る直線LMに変換する。

以下の字句を用いてPASCALの定理の双対を作成せよ。

【字句】：　円O、６つの接線、点、を通る直線、3直線、ある1点、を通る

a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, $a_1 \cap b_2$, $a_2 \cap b_1$ $a_1 \cap b_3$, $a_3 \cap b_1$, $a_2 \cap b_3$, $a_3 \cap b_2$, p, q, r, L

円Oの周上の6点、A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3をとる。

直線A_1B_2とA_2B_1の交点をP、

直線A_1B_3とA_3B_1の交点をQ、

直線A_2B_3とA_3B_2の交点をR、

とする。

3点 P, Q, Rはある1直線上ℓにある。

双対

答え

円Oの6つの接線 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 をとる。

（接点が A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3）

点 $a_1 \cap b_2$ と点 $a_2 \cap b_1$ を通る直線を p、

点 $a_1 \cap b_3$ と点 $a_3 \cap b_1$ を通る直線を q、

点 $a_2 \cap b_3$ と点 $a_3 \cap b_2$ を通る直線を r

とする。

3直線 p, q, r はある1点 L で交わる。

より詳しく記すと、

円Oの周上の6点、A_1， A_2， A_3， B_1， B_2， B_3をとる。

d:=直線A_1B_2, e:=直線A_2B_1、

f:=直線A_1B_3, g:=直線A_3B_1、

h:=直線A_2B_3, i:=直線A_3B_2　と置く。

直線dとeの交点をP、

直線fとgの交点をQ、

直線hとiの交点をR　とする。

3点 P，Q，Rはある1直線上ℓにある。

双対

円Oの6つの接線 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ をとる。

（接点が、A_1， A_2， A_3， B_1， B_2， B_3となる。）

すると、

点D=交点$a_1 \cap b_2$, 点E=交点$a_2 \cap b_1$

点F=交点$a_1 \cap b_3$, 点G=交点$a_3 \cap b_1$

点H=交点$a_2 \cap b_3$, 点I=交点$a_3 \cap b_2$　となる。

また、

直線DEが直線p、直線FGが直線q、直線HIが直線r、

となる。

最後に、

（3点 P，Q，Rはある1直線上ℓにあるので、）

3直線 p, q, r はある1点Lを通ることになる。

この答をBrianchon（ブリアンション）の定理と言う。

【図】Brianchon（ブリアンション）の定理