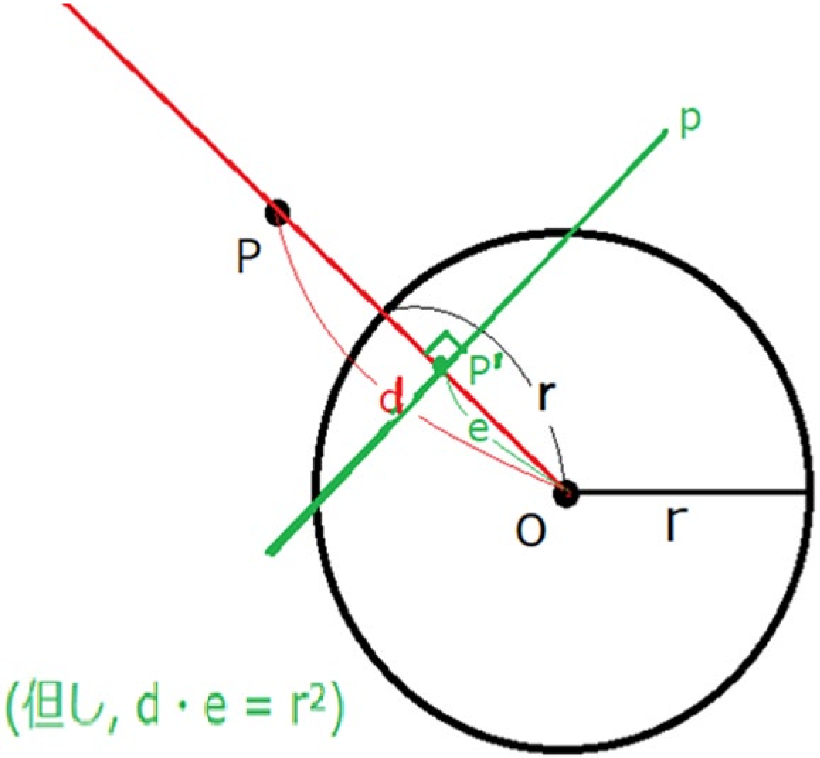
幾何学特論

第13講20250707

円Oに関する双対変換（双対点（極）と双対直線（極線））

定義

平面上に原点中心、半径rの円Oがある。

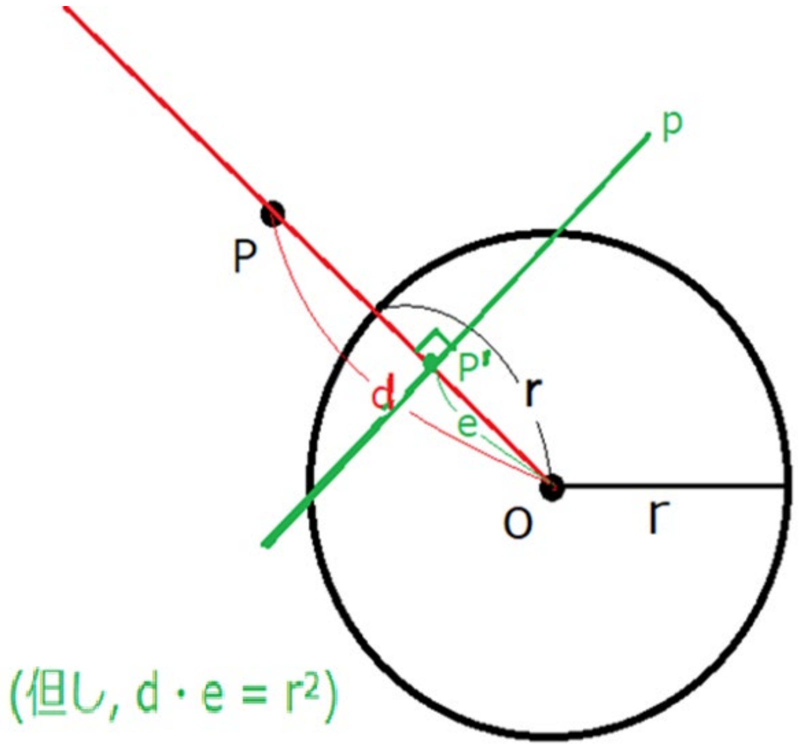


平面上の各点Pに対して。

（OPの長さをdとする。）　半直線OP上にOP・OP’ = r^2 （即ち OP‘ = e （但しd・e = r^2））となる点P’を採り、P’ でOPと直交する直線pを考える。

直線pを（円Oに関する）点Pの**双対直線（極線）**と言う。

（定義続く）



平面上の直線pに対して。

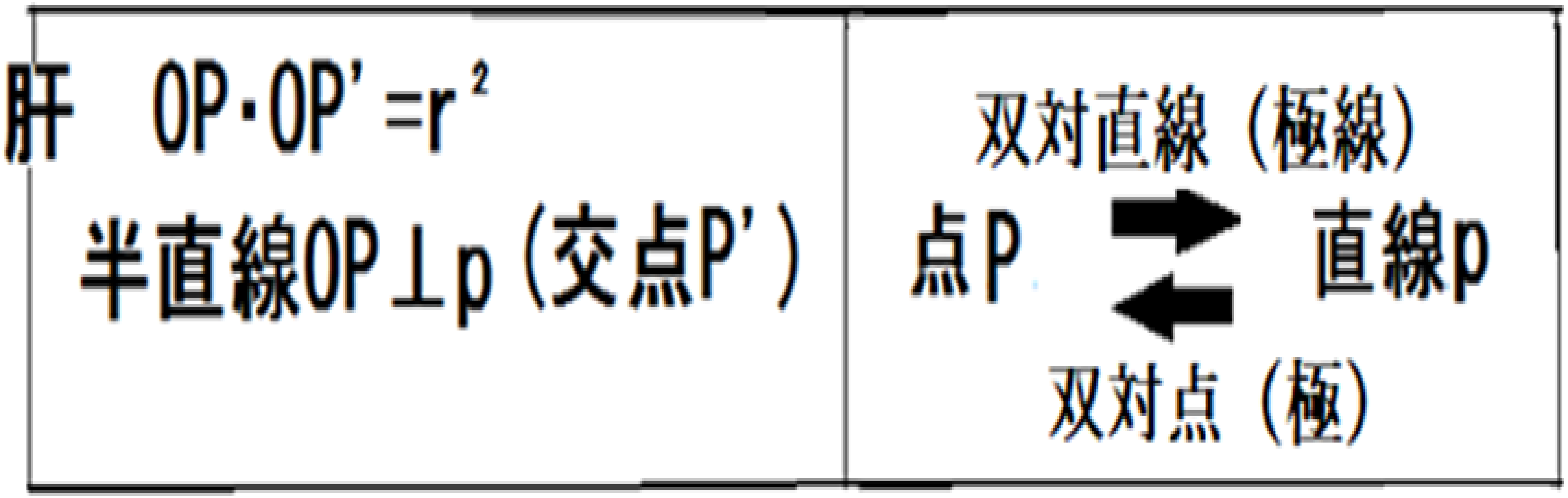
Oからpに下した垂線の足をP'とする。（OP'の長さを e とする。）

半直線OP'上にOP・OP' = r^2 （即ち OP = d （但しd・e = r^2）） となる点Pを考える。点Pを（円Oに関する）直線pの**双対点**（**極**）という。

（定義終）

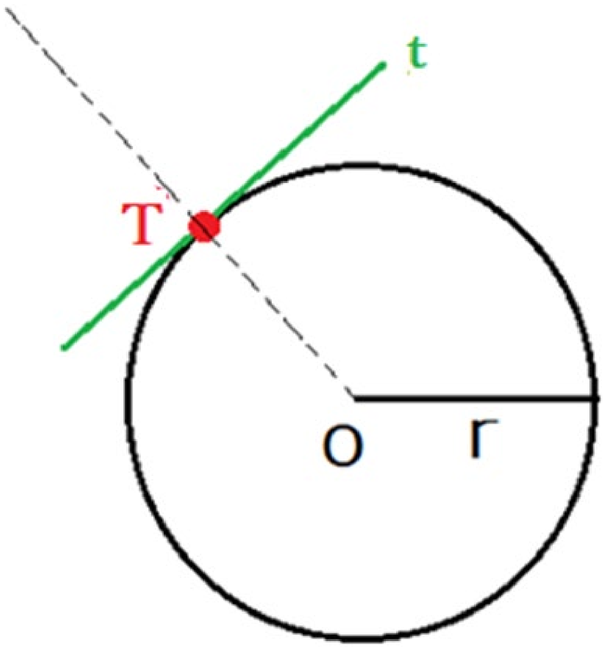
（注）上の定義より、双対直線と双対点は１対１に対応する。即ち、

点 P の双対直線が直線pである ⇔ 直線pの双対点が点Pである。



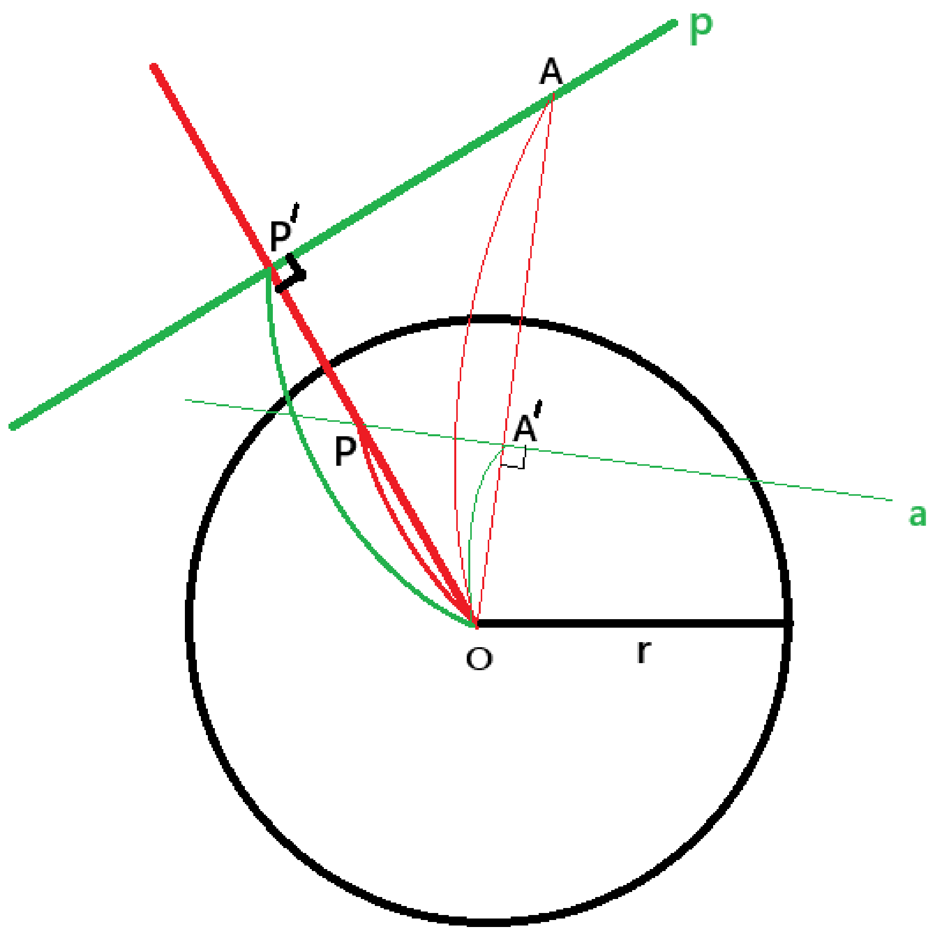
定理

円Oの周上の点Tでの接線tは、点Tに対する双対直線（極線）である。
円Oの接線tの接点Tは、直線tに対する双対点（極）である。

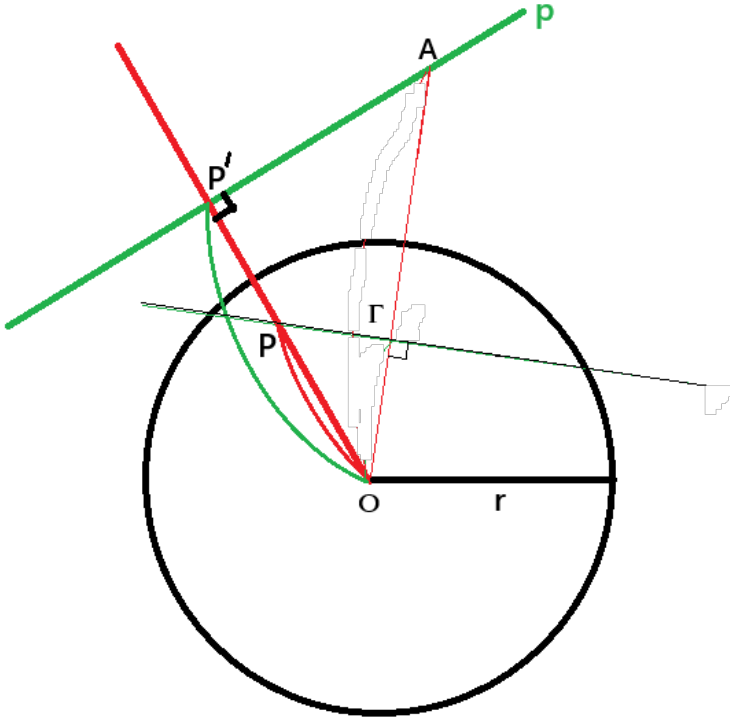


（略証）OT⊥t　かつ　OT・OT＝r^2　なので。

定理　直線pが点Aを通るならば、
(Aの)双対直線aは(pの)双対点Pを通る。



（証明）



- PからOAに垂線PΓを下す。

（１） △OPΓ ∽△OAP'を示せ。
（２） ここから OP・OP '= OA・OΓ を示せ。
（３） 従って、OA・OΓ ＝ r^2 となり
直線PΓは点Ａの双対曲線aと一致する。 （証明終）

定理　以下、点A（大文字）と直線a（小文字）が相互に変換するとする。
①　2点を通る直線は、2点の双対直線の交点に変換する。
　つまり、2点A,Bを通る直線 ℓ は、2直線a,bの交点Lに変換する。
②　2直線の交点は、2直線の双対点を通る直線に変換する：
　つまり、2直線 ℓ ,mの交点Aは、2点L,Mを通る直線aに変換する。

（証明）
①　直線ABを ℓ とする。
直線 ℓ 上が点A,Bを通るので、直前の定理より、直線 a, b は点__を通る。
よって、点Lは2直線a,bの交点__である。
②　2直線 ℓ ,mの交点をAとする。
　　直線 ℓ ,mが点Aを通るので、直前の定理より、直線 a は点__, __を通る。
よって、直線aは直線LMである。

（証明終）