

幾何學特論

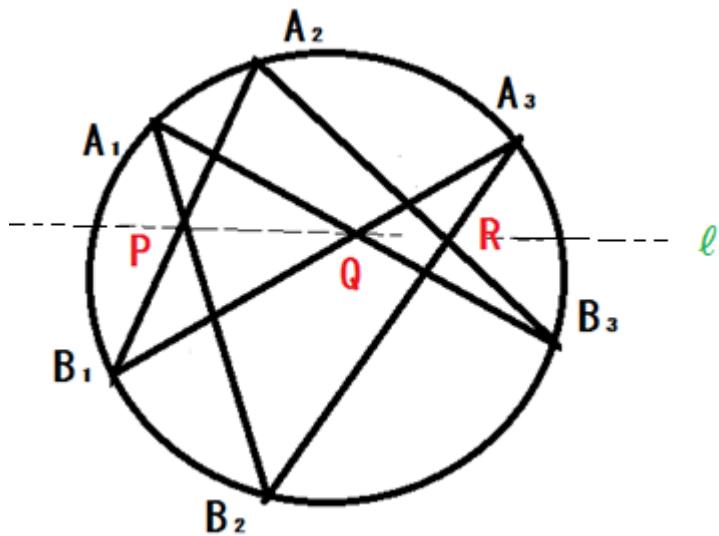
第14講20250714 (1 節所訂正)

PASCAL の定理 (復習)

円Oの周上の6点、 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ をとる。

直線 A_1B_2 と A_2B_1 の交点をP、
直線 A_1B_3 と A_3B_1 の交点をQ、
直線 A_2B_3 と A_3B_2 の交点をR、
とする。

3点 P, Q, R はある1直線 ℓ 上にある。



円Oに関する双対変換

というのが存在し、以下の性質が成り立つ。

- 点が直線、直線が点に、相互に変換する。
以下、点A（大文字）と直線a（小文字）が相互に変換するとする。
 - 円Oの周上の点Tが接線tに、接線tが接点Tに、変換する。
 - 点を直線が通るならば、双対直線は双対点を通る：
直線 ℓ が点Aを通るならば、直線aは点Lを通る。
 - 2点を通る直線は、2点の双対直線の交点に変換する：
2点A,Bを通る直線 ℓ は、2直線a,bの交点Lに変換する。
 - 2直線の交点は、2直線の双対点を通る直線に変換する：
2直線 ℓ, m の交点Aは、2点L,Mを通る直線aに変換する。

Brianchonの定理

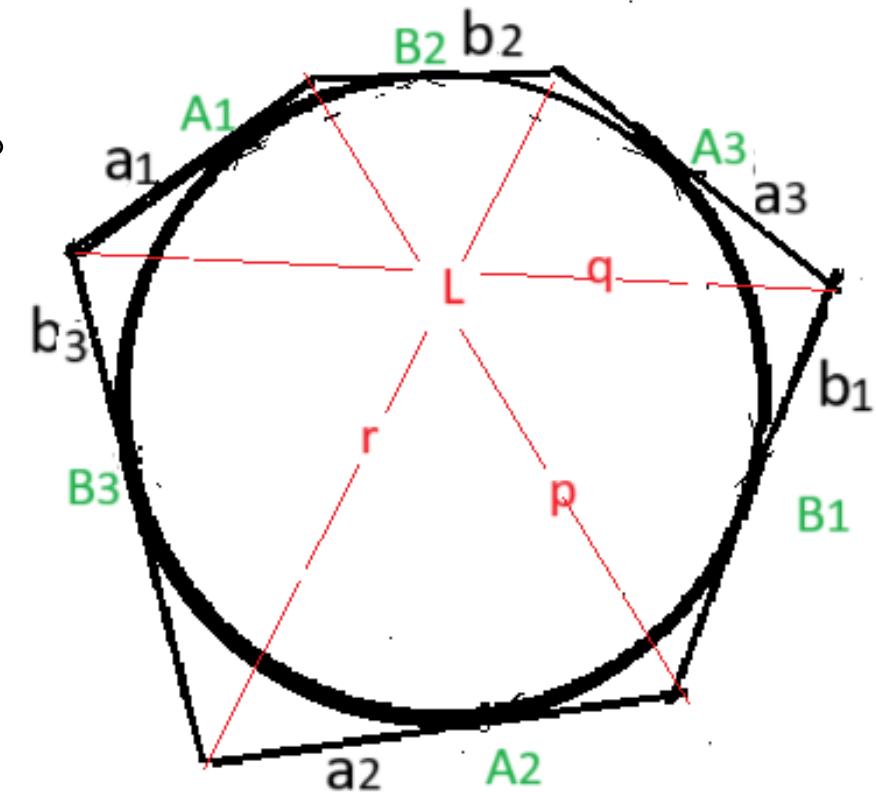
円Oの円Oの6つの接線 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ を考える。

交点 $a_1 \cap b_2$ と交点 $a_2 \cap b_1$ を結ぶ直線をp、

交点 $a_1 \cap b_3$ と交点 $a_3 \cap b_1$ を結ぶ直線をq、

交点 $a_2 \cap b_3$ と交点 $a_3 \cap b_2$ を結ぶ直線をr、とする。

3直線 p, q, r はある1点Lを通る。



(証明)

円Oの6つの接線 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ に対し、それらの双対が、
6つの接点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ となる。

1. この円Oの周上の6点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ に、
Pascalの定理を適用する（くどく書く）。

結果

$d :=$ 直線 $A_1 B_2, e :=$ 直線 $A_2 B_1,$

$f :=$ 直線 $A_1 B_3, g :=$ 直線 $A_3 B_1$

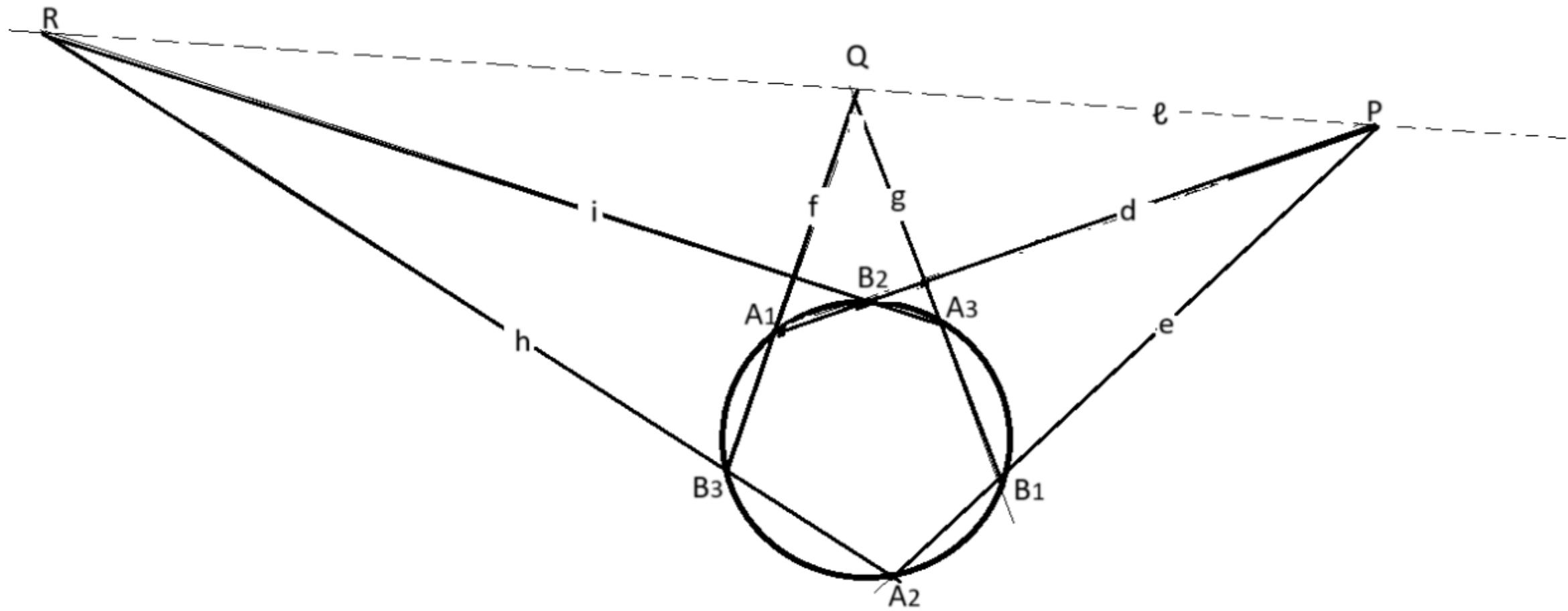
$h :=$ 直線 $A_2 B_3, i :=$ 直線 $A_3 B_2$ 、と置く。

直線dとeの交点をP、

直線fとgの交点をQ、

直線hとiの交点をR、とする。

3点 P, Q, R はある1直線 ℓ 上にある。



2. 1.の結果について円Oに関する双対を考えよう。

(d,e,f,**g,h,i**, P, Q, R, ℓ の双対をD,E,F,**G,H,I**, p, q, r, Lとする。)

点D は交点 $a_1 \cap b_2$ であり, 点Eは交点 $a_2 \cap b_1$ である。

点F は交点_____であり, 点Gは交点_____である。

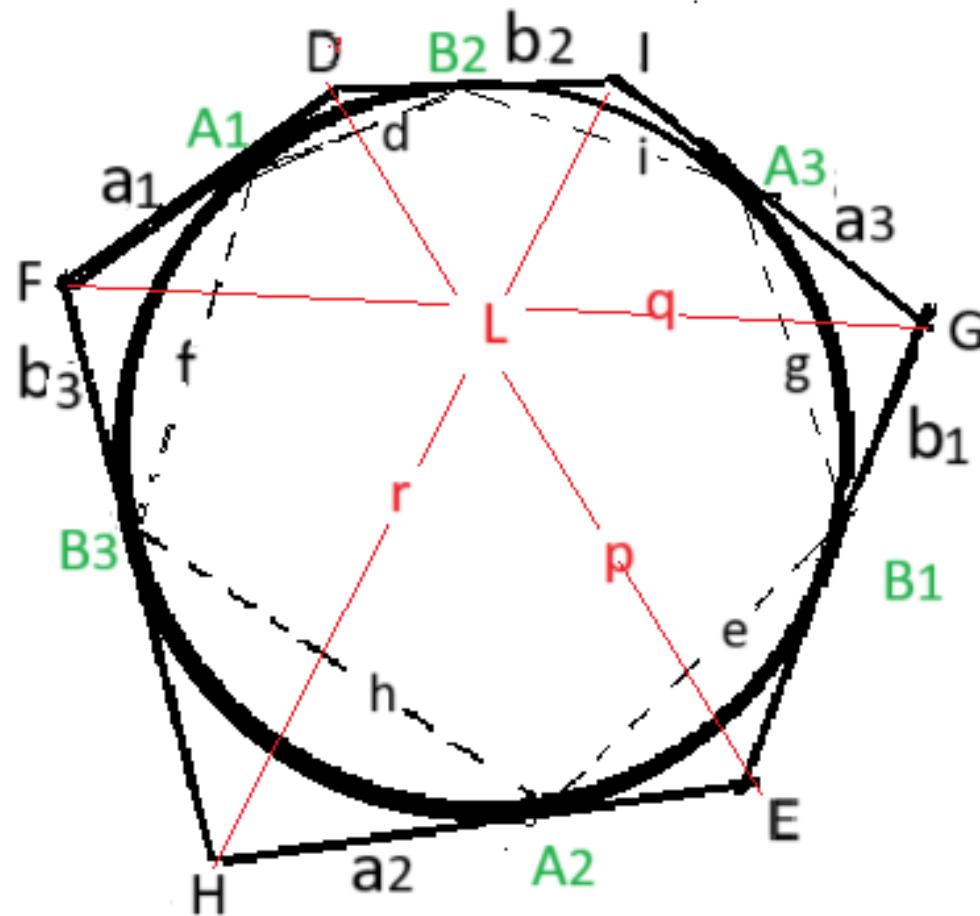
点H は交点_____であり, 点Iは交点_____である。

点D,Eを結ぶ直線がpであり、

点F,Gを結ぶ直線が_____であり、

点H,Iを結ぶ直線が_____である。

3 直線_____,_____,_____, は1点_____で交わる。



[証明終]