

幾何学特論

第14講20250714（1箇所訂正）

P A S C A L の定理 (復習)

円Oの周上の6点、 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ をとる。

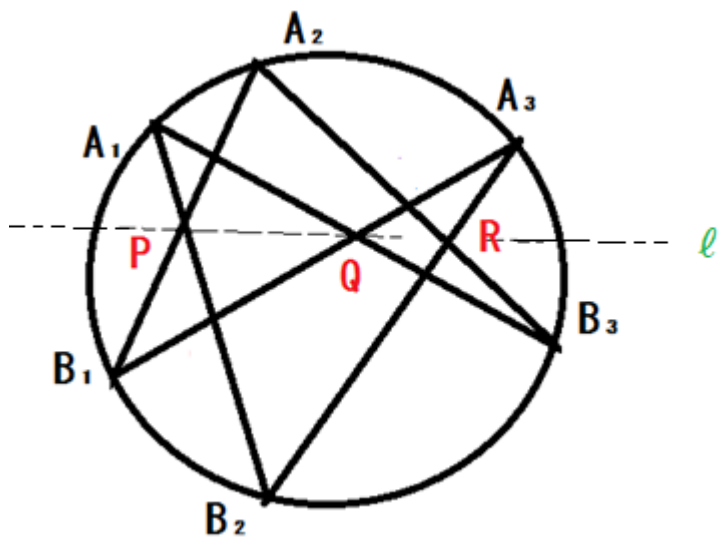
直線 A_1B_2 と A_2B_1 の交点をP、

直線 A_1B_3 と A_3B_1 の交点をQ、

直線 A_2B_3 と A_3B_2 の交点をR、

とする。

3点 P, Q, Rはある1直線 ℓ 上にある。



円Oに関する双対変換

というのが存在し、以下の性質が成り立つ。

- ・ 点が直線、直線が点に、相互に変換する。
以下、点A（大文字）と直線a（小文字）が相互に変換するとする。
- ・ 円Oの周上の点Tが接線tに、接線tが接点Tに、変換する。
- ・ 点を直線が通るならば、双対直線は双対点を通る：
直線 ℓ が点Aを通るならば、直線aは点Lを通る。
- ・ 2点を通る直線は、2点の双対直線の交点に変換する：
2点A,Bを通る直線 ℓ は、2直線a,bの交点Lに変換する。
- ・ 2直線の交点は、2直線の双対点を通る直線に変換する：
2直線 ℓ, m の交点Aは、2点L,Mを通る直線aに変換する。

Brianchonの定理

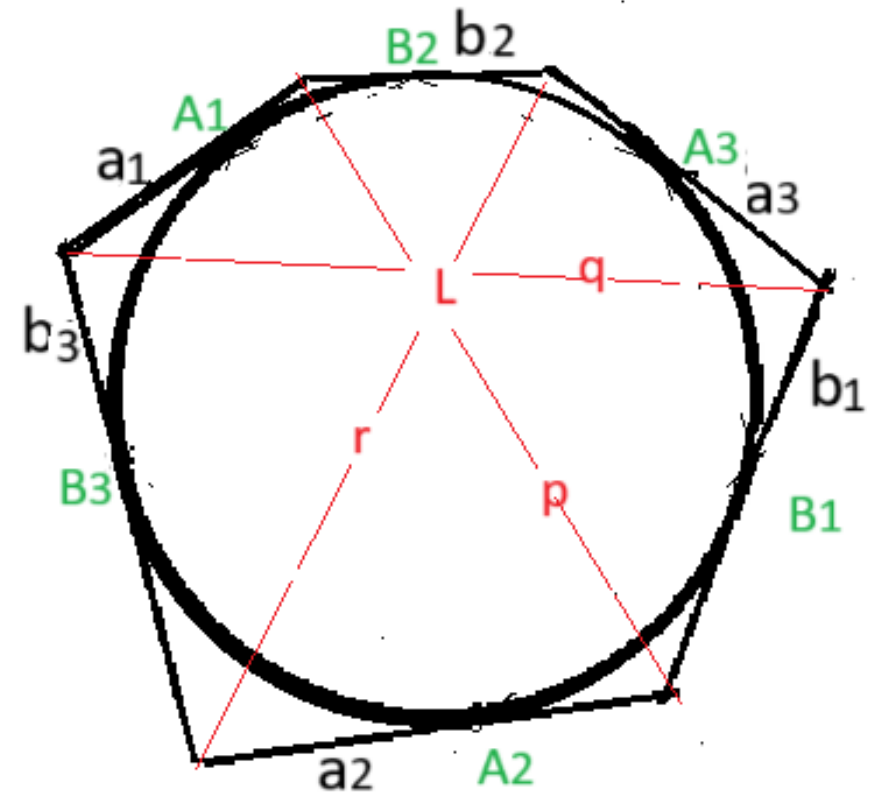
~~円O~~ 円Oの6つの接線 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ を考える。

交点 $a_1 \cap b_2$ と交点 $a_2 \cap b_1$ を結ぶ直線を p 、

交点 $a_1 \cap b_3$ と交点 $a_3 \cap b_1$ を結ぶ直線を q 、

交点 $a_2 \cap b_3$ と交点 $a_3 \cap b_2$ を結ぶ直線を r 、とする。

3直線 p, q, r はある1点 L を通る。



(証明)

円 O の6つの接線 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ に対し、それらの双対が、6つの接点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ となる。

1. この円 O の周上の6点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ に、Pascalの定理を適用する（くどく書く）。

結果

$d := \text{直線 } A_1 B_2, e := \text{直線 } A_2 B_1、$

$f := \text{直線 } A_1 B_3, g := \text{直線 } A_3 B_1$

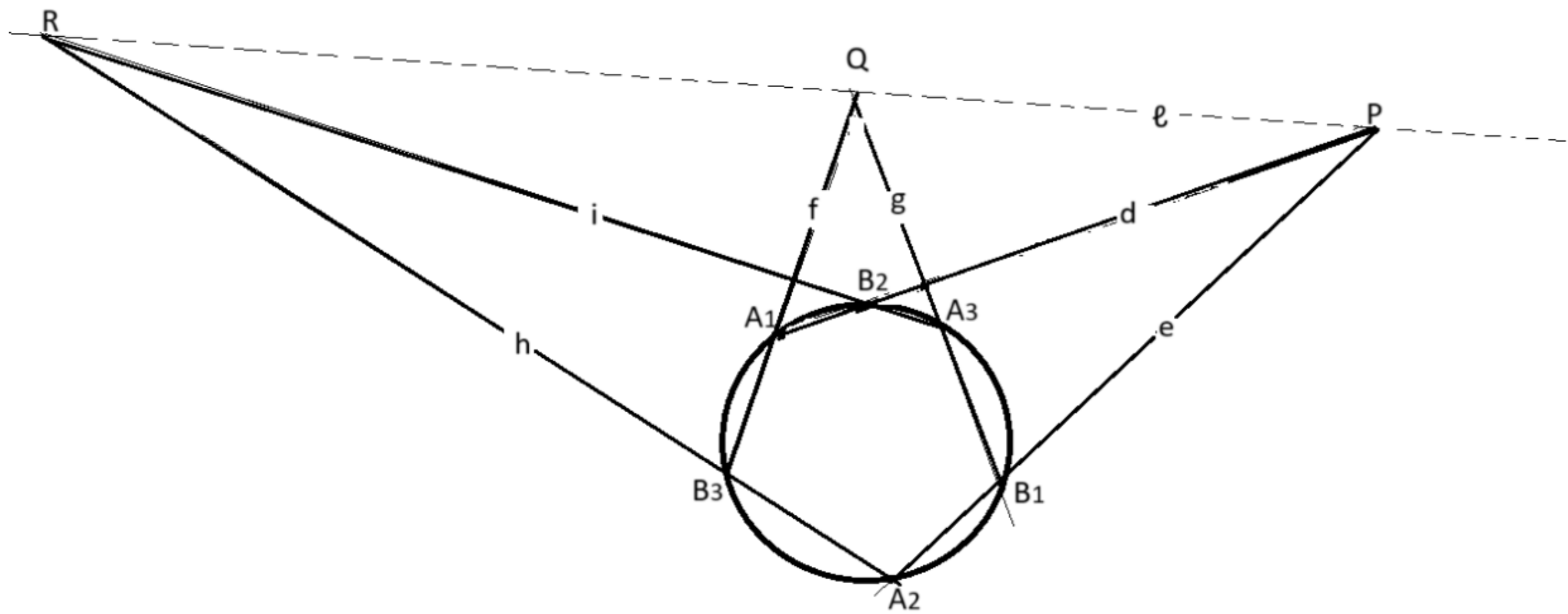
$h := \text{直線 } A_2 B_3, i := \text{直線 } A_3 B_2、$ と置く。

直線 d と e の交点を $P、$

直線 f と g の交点を $Q、$

直線 h と i の交点を $R、$ とする。

3点 P, Q, R はある1直線 ℓ 上にある。



2. 1.の結果について円Oに関する双対を考えよう。

($d, e, f, g, h, i, P, Q, R, \ell$ の双対を $D, E, F, G, H, I, p, q, r, L$ とする。)

点D は交点 $a_1 \cap b_2$ であり, 点Eは交点 $a_2 \cap b_1$ である。

点F は交点_____であり, 点Gは交点_____である。

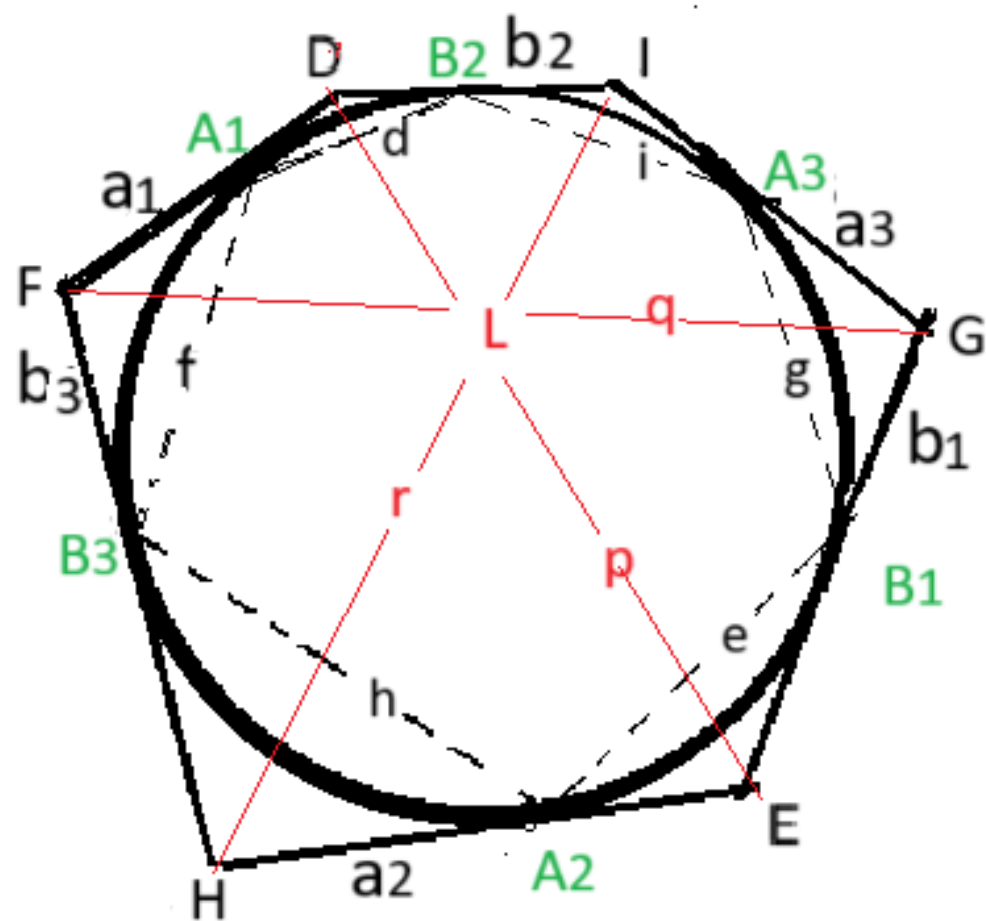
点H は交点_____であり, 点Iは交点_____である。

点D,Eを結ぶ直線がpであり、

点F,Gを結ぶ直線が__であり、

点H,Iを結ぶ直線が__である。

3 直線__, __, __は1点__で交わる。



[証明終]