

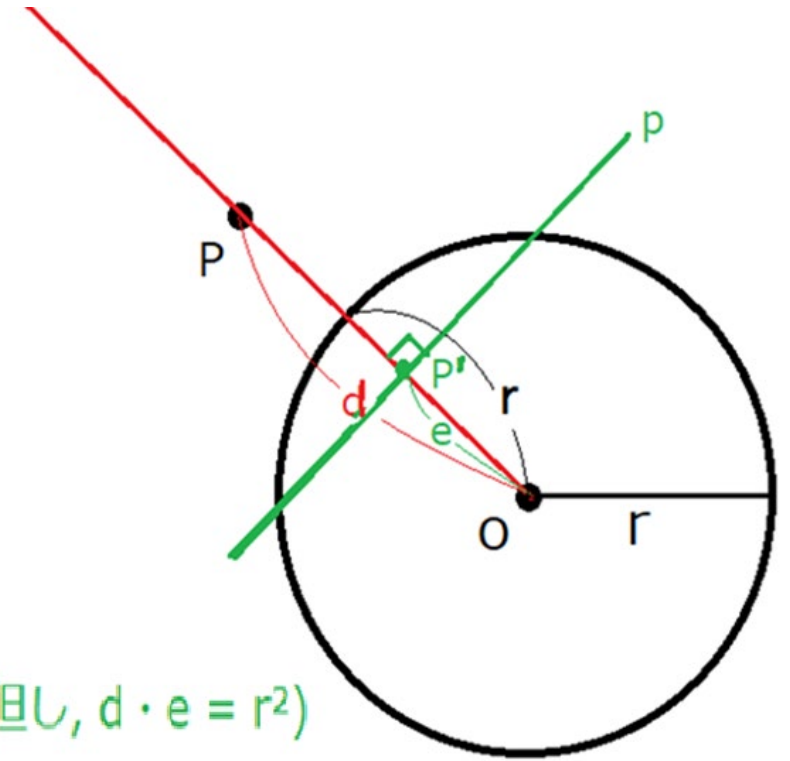
幾何学特論

第13講20250707 (20260717版)

円Oに関する双対変換（双対点（極）と双対直線（極線））

定義

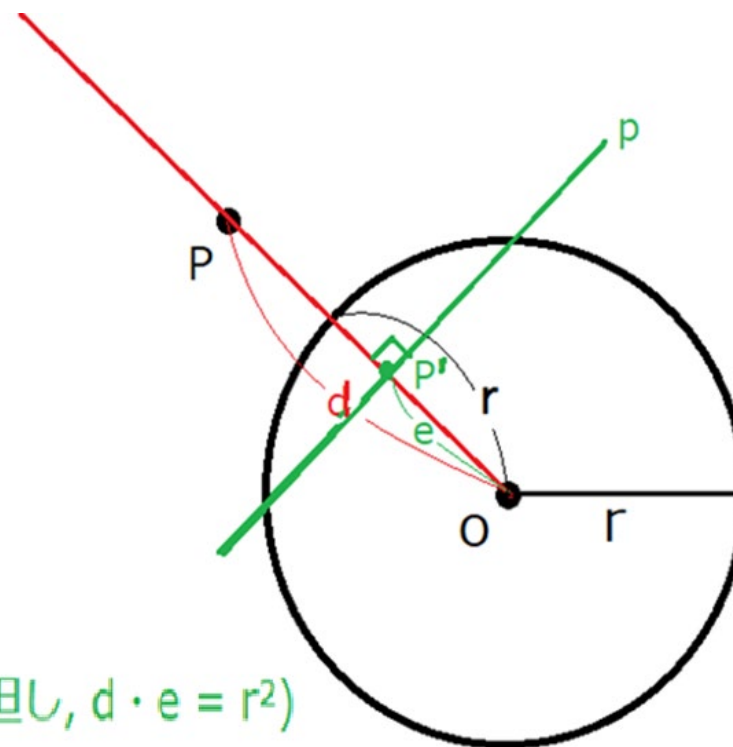
平面上に原点中心、半径 r の円Oがある。



平面上の各点Pに対して。

（ OP の長さを d とする。） 半直線 OP 上に $OP \cdot OP' = r^2$ （即ち $OP' = e$ ）
（但し $d \cdot e = r^2$ ）となる点 P' を採り、 P' で OP と直交する直線 p を考える。
直線 p を（円Oに関する）点 P の双対直線（極線）と言う。

(定義続く)



(但し, $d \cdot e = r^2$)

平面上の各直線 p に対して。

O から p に下した垂線の足を P' とする。(OP' の長さを e とする。)

半直線 OP' 上に $OP \cdot OP' = r^2$ (即ち $OP = d$ (但し $d \cdot e = r^2$)) となる点 P を考える。点 P を (円 O に関する) 直線 p の**双対点** (**極**) という。

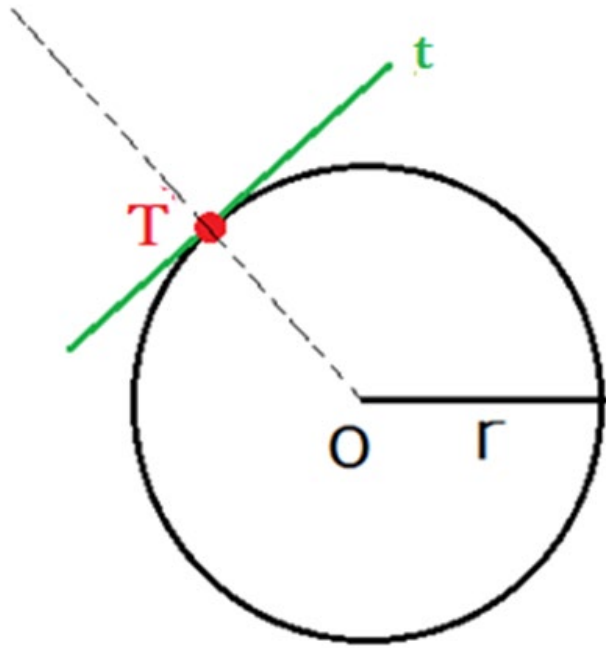
(定義終)

(注) 上の定義より、双対直線と双対点は1対1に対応する。即ち、
点 P の双対直線が直線 p である $\Leftrightarrow$ 直線 p の双対点が点 P である。

肝 $OP \cdot OP' = r^2$ 半直線 $p \perp OP'$ (交点 P')	双対直線 (極線) 点 $P \rightleftarrows$ 直線 p 双対点 (極)
---	--

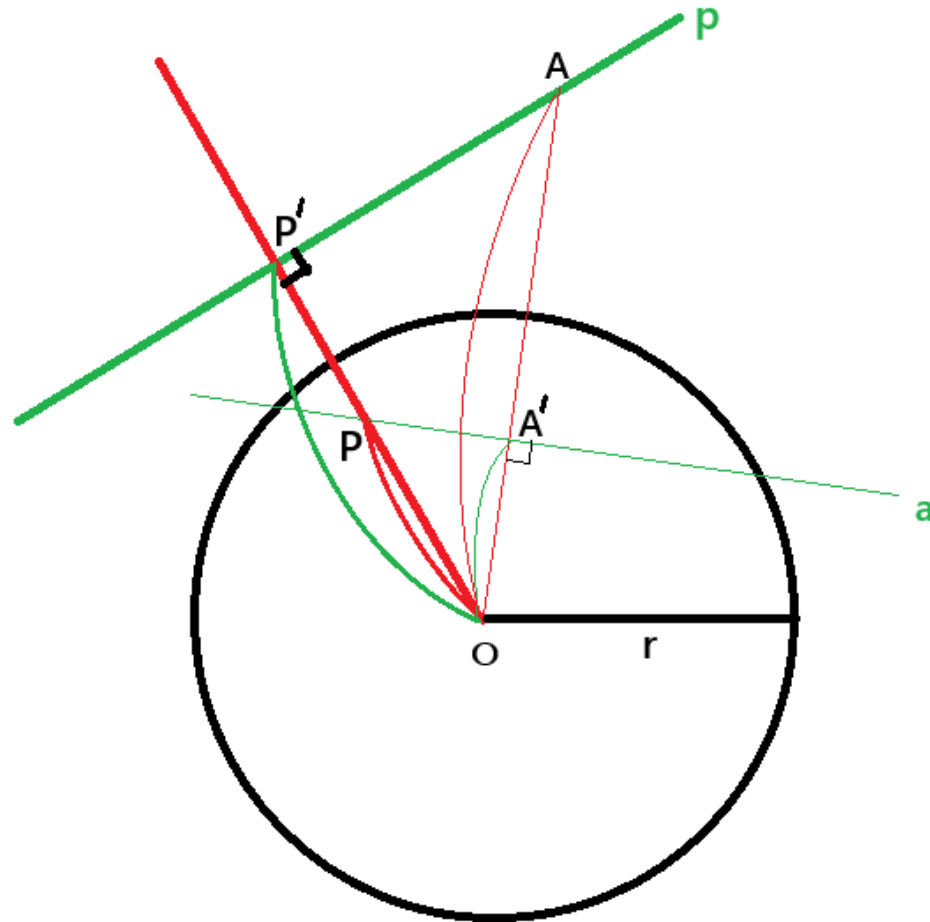
定理

円Oの周上の点Tでの接線tは、点Tに対する双対直線（極線）である。
円Oの接線tの接点Tは、直線tに対する双対点（極）である。

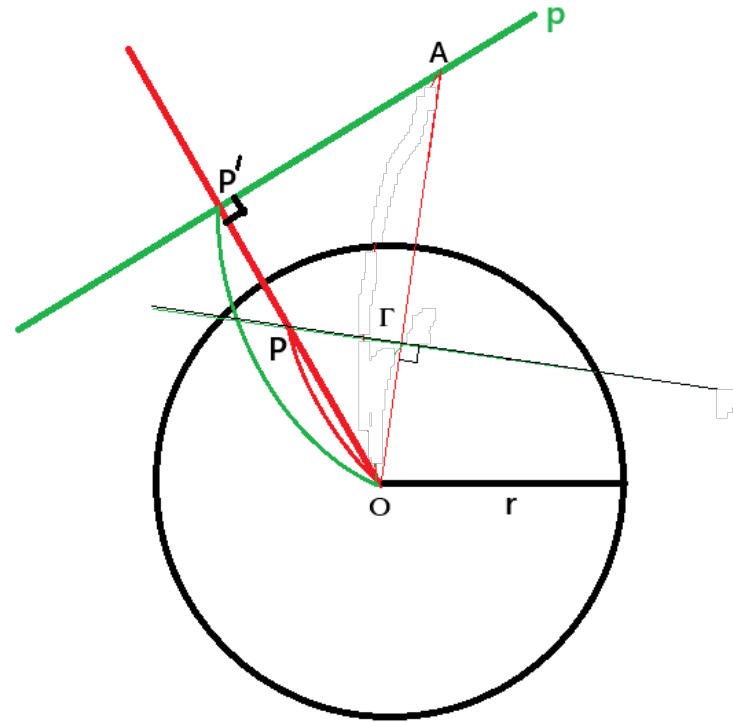


(略証) $t \perp OT$ at T かつ $OT \cdot OT = r^2$ なので。

定理 直線 p が点 A を通るならば、
(A の)双対直線 a は(p の)双対点 P を通る。



(証明)



- PからOAに垂線PΓを下す。
 - (1) $\triangle OP\Gamma \sim \triangle OAP'$ を示せ。
 - (2) ここから $OP \cdot OP' = OA \cdot O\Gamma$ を示せ。
 - (3) 従って、 $OA \cdot O\Gamma = r^2$ となり
直線PΓは点Aの双対曲線aと一致する。 (証明終)

定理 以下、点A（大文字）と直線a（小文字）が相互に変換するとする。

- ① 2点を通る直線は、2点の双対直線の交点に変換する。
つまり、2点A,Bを通る直線 ℓ は、2直線a,bの交点Lに変換する。
- ② 2直線の交点は、2直線の双対点を通る直線に変換する：
つまり、2直線 ℓ, m の交点Aは、2点L,Mを通る直線aに変換する。

（証明）

- ① 直線ABを ℓ とする。
直線 ℓ が点A,Bを通るので、直前の定理より、直線 a, b は点__を通る。
よって、点Lは2直線a,bの交点である。
- ② 2直線 ℓ, m の交点をAとする。
直線 ℓ, m が点Aを通るので、直前の定理より、直線 a は点__, __. を通る。
よって、直線aは直線LMである。

（証明終）