代数学 III

2017 年度

目次

第 0 章　代数方程式

代数方程式

代数方程式とは未知数の多項式の等式として表わされる方程式である．通常，未知数と多項式の個数がともに 1 であるものを意味することが多い．ここでも，断らない限りその意味で使う．

代数方程式は，未知数を x で表わすと

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,\ a_n \neq 0 \tag{$*$}$$

の形に表わされる（標準形）．ここで a_0, ..., a_n は定数である．

このように未知数の n 次式で表わされる方程式は，n **次方程式**と呼ばれる．

方程式 $(*)$ を解くとは $(*)$ をみたす x の値を求めることである．

代数方程式の研究は未知数 1 個の 1 次方程式から始まったが，一般化として未知数（と方程式）の個数を増やす方向と式の次数を高くする方向（高次方程式）の両方で進歩してきた．式の次数は 1 次のままで未知数を増やす方向は現在の線型代数の起源となった．一方，未知数は 1 個のままで式の次数を 2, 3, 4, 5, . . . と高くする方向は現在の群，環，体などの代数系の理論（かつては抽象代数学と呼ばれた）に繋がった．

現在では，未知数も式の次数も限定しない研究[*1]が行われていて，その分野は「代数幾何学」と呼ばれている．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & \text{連立 1 次方程式} \arrow[dr] & \\
\text{単独 1 次方程式} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{代数幾何学} \\
 & \text{単独高次方程式} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

[*1] もちろん，この方向での研究も古代から行われてはいるが，近代までは体系的なものはあまり見られない．

方程式研究の進展

1 次，2 次方程式

1 次及び 2 次の方程式は紀元前から考察されており，解の求め方（計算法）は現在と同じものが知られていた．ただし，中世以前は数の範囲が正数に限られていたので，すべての解を得ることは出来なかった．

例えば，古代エジプトの歴史資料として有名なリンドパピルス[*2]に次の問題が記されている．

> アハ (aha) とアハの $\frac{1}{7}$ の和が 19 であるとき，そのアハを求めよ．

ここでアハ[*3]は未知数を表わす言葉で，したがって上の問題は次の方程式を解くことと同等である．

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

ただし，リンドパピルスに記されている解法は現在の 1 次方程式の標準的解法とは異なる．

2 次方程式については，4000 年ほど前のバビロニアで扱われている．例えば，当時の問題集に次の問題と解が記されている[*4]と言う．

> ある正方形の面積から 1 辺をひいて 870 なら，その正方形の 1 辺はいくらか．

そして，この解を次のように説明している．

> 1 の半分 $\frac{1}{2}$ をとり，$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ を 870 に加える．$870 + \frac{1}{4} = \frac{3481}{4}$ は $\frac{59}{2}$ の 2 乗である．これに $\frac{1}{2}$ を加えた $\frac{59}{2} + \frac{1}{2} = 30$ が求める正方形の 1 辺である．

現在の記号法を使えば，2 次方程式

$$x^2 - x = 870$$

を

$$右辺 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 870 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{59}{2}\right)^2,$$

$$左辺 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

[*2] B. C. 1650 頃

[*3] 本来の意味は「積み上げげた山」．

[*4] 当時のバビロニアでは記数法として 60 進法が使われており，数字も現在の算用数字とはまったく異なるが，ここでは現代式の記法を使う．

$$\therefore\ x-\frac{1}{2}=\frac{59}{2},$$
$$\therefore\ x=\frac{59}{2}+\frac{1}{2}=30$$

として解いているわけで，2 次方程式の解法には平方完成が基本となることをすでに理解していたと思われる．

ただし，当時は正の有理数（と 0）だけを数として考えていたので，2 次方程式の解もその範囲だけで考えている．負数はまだ認めていないし，平方根の計算で無理数が現れる場合も近似値を有理数で求めているに止まる．

9 世紀の数学者アル＝フワーリズミー（al-Khwārizmī，780 頃 850 頃）[*5]は著書 hisb al-jabr wa'l muqbala（ヒサーブ・アル＝ジャブル・ワル＝ムカーバラ＝約分と消約の計算の書）[*6]で，（1 次または 2 次の）方程式は **jabr**（移項）によって次の 6 種類に分類できるとし，それぞれの解の公式を記している．

- $bx=c$.
- $bx=ax^2$.
- $ax^2=c$.
- $ax^2+bx=c$.
- $bx+c=ax^2$.
- $ax^2+c=bx$.

もちろん，上のような現在の記号法を使用してはおらず，方程式を「根が平方に等しい」のような言葉で表わしている．また，解の公式は図形で説明していると言う．

2 次方程式が 5 種類に分類され，どれもが現在の標準形とは異なっているのは負数が使用されていないからである．

3 次，4 次方程式

3 次以上の方程式も古代から特別な型については解法が調べられていたが，一般の 3 次方程式と 4 次方程式について解の公式が得られたのは 16 世紀である．

1545 年，**カルダノ**（Hieronimo Cardano, 1501-1576）の「アルス・マグナ」（Ars Magna、ラテン語で「偉大なる技術」の意）と題する著書が出版された．この本には，3 次方程式について今日カルダノの解法[*7]と呼ばれるもの，そして 4 次方程式についての**フェラリ**[*8]（Ludovico Ferrari, 1522-1565）の解法と呼ばれるものが記されている．

これらの解法は後の章で解説するが，「アルス・マグナ」では図形によって説明されて

[*5] 彼の名前はアルゴリズムの語源となった．
[*6] al-jabr は英語の **algebra** ＝代数の語源となった．
[*7] 3 次方程式の解法を最初に発見したのが誰であるかについては種々の議論がある．
[*8] フェラリはカルダノの弟子である．

いる．すなわち，現在のような記号を使った代数の方法はまだ普及していないことが分かる．

一方で，この書からは当時はまだ使用が広く受け入れられているとは言えなかった負数やさらに虚数を積極的に使おうとする考え方も窺える．

その後，3, 4 次方程式にはカルダノやフェラリ以外の解法も発見されているが，それらは 5 次方程式の解法につなげようとする試みとも関連している．

5 次方程式

4 次方程式の解法が発見されれた後は当然 5 次方程式を解く努力が開始され，二百数十年間の研究で次のようなことが分かってきた．

- 式の巧妙な変形だけでは解は得られない．
- 解法を探る上で，根[*9]の有理式を調べることが有効である．
- 根の有理式に関係して，根の置換の集まりとしての**置換群**を調べることが有効である．
- 方程式と解を表わすための数の集合を**数体**として考察する必要がある．

以上のような考察・研究を経て，19 世紀前半にアーベル（Niels Henrik Abel, 1802-1829）によって 5 次方程式には「解の公式」が存在しないことが証明され，次いでガロア（Evariste Galois, 1811-1832）が一般次数の方程式について解の公式が存在するための条件を求めることに成功した．

これによって，代数方程式の解法については一応の決着が得られた．その後，方程式に関するガロアの研究はデデキント（Julius Wilbelm Richard Dedkind, 1831-1916）などによって，**体**とその**同型写像**の群の理論として完成された（**ガロア理論**）．

[*9] 代数方程式の解には根と言う言葉を使う習慣がある．

第 1 章　2 次方程式

未知数 x についての 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \text{（}a\text{，}b\text{，}c \text{ は定数，} a \neq 0\text{）} \tag{1.1}$$

の解は次のように得られた．

(1.1) の両辺を a で割る．

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

両辺に $\dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}$ を加える．

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
&= x^2 + \frac{b}{a}x + + \frac{b^2}{4a^2} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \\
\text{右辺} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.
\end{aligned}$$

したがって

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

であり

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

問 1.1. 次の方程式を解け．ただし，i は虚数単位（$\sqrt{-1}$）とする．

(1) $x^2 - 2x - 1 = 0.$　(2) $x^2 + x + 1 = 0.$　(3) $x^2 - (1 + i)x + i = 0.$

(4) $x^2 - 2x - (2 + 4i) = 0.$

最初に示した解法は虚数係数の方程式にも適用できるが，その場合解を複素数として表わすためには虚数の平方根の意味を確定する必要がある．複素数の累乗根については第 3 章で触れるが，任意の複素数について平方根の存在が分かっているので，2 次方程式の解法は複素数係数の場合も含めて次のように要約できる．

方程式 (1.1) に対して，未知数 y の方程式

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{1.2}$$

の解の一つ，すなわち

$$\Delta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

をみたす複素数 Δ をとれば，方程式 (1.1) の解は

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \Delta$$

である．

註. 方程式 (1.1) の 2 解を x_1, x_2 とするとき $\Delta^2 = (x_1 - x_2)^2$ に注意.

問 1.2. 上の等式を証明せよ.

第 2 章　3 次方程式

これから代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,\ a_n \neq 0 \tag{$*$}$$

について考えていくが，断らない限りその係数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ は複素数とする．なお，前章と同様，これからも虚数単位を i（または $\sqrt{-1}$）で表わす．

以下では，代数方程式の解を**根**とも言う．又，方程式 $(*)$ の根を左辺の多項式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

の根とも言う．

2.1　カルダノの解法

一般の 3 次方程式として次の方程式を考える（$a \neq 0$）．

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{$*$}$$

問 2.1. 方程式 $(*)$ について，定数 α, β を選んで次のように変形することは**できない**ことを示せ．

$$a(x+\alpha)^3 = \beta.$$

3 次方程式については，カルダノの解法と呼ばれる以下に紹介する解法が知られている．

3 次方程式 $(*)$ は 3 次の係数が 1 である次の型に帰着できる．

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{$**$}$$

さらに $y = x + a/3$ とおくことで

$$y^3 + py + q = 0 \tag{$***$}$$

に帰着できる．

$(***)$ の係数から得られる 2 次方程式

$$T^2 + qT + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \tag{$\bigstar$}$$

の 2 根を U, V とし，u, v を

$$u^3 = U,\ v^3 = V,\ uv = -\frac{p}{3}$$

をみたすようにとると

$$u + v,\ \omega u + \omega^2 v,\ \omega^2 u + \omega v$$

が $(* * *)$ の 3 根である．ここで ω は 1 の虚数 3 乗根，以下でもこの章の終りまで ω はこの意味とする．

この解法では $(* * *)$ を解くためにまず (★) を解くことになるが，このような場合 (★) を $(* * *)$ の**補助方程式**と言う．

註. 具体的な方程式を解くとき，元の方程式が $(*)$ または $(**)$ の型であれば $(* * *)$ の型に変形する必要がある．

$(**)$ から $(* * *)$ への変形は $(**)$ の左辺を $f(x)$ とおくとき

$$q = f(-a/3),$$
$$p = f'(-a/3).$$

によって得られる．

例 2.1. $x^3 + 3x^2 + 9x + 5 = 0.$

根は

$$x = -1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{-2},\ \ -1 - \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{-2}) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} - \omega\sqrt[3]{-2})i.$$

(3 乗根は実数のものをとる．)

例 2.2. $x^3 + 6x - 20 = 0.$

根は

$$\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}},$$
$$\omega\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \omega^2\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}},$$
$$\omega^2\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \omega\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$$

(3 乗根は実数のものをとる)．

3 乗根を詳しく求めると

$$2 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}),\ \ -1 \pm 3i$$

が根であることが分かる．

問 2.2. $\omega(1+\sqrt{3})+\omega^2(1-\sqrt{3})=-1+3i$ を確かめよ.

例 2.3. $x^3+2x-4i=0$.
　補助方程式

$$T^2-4iT-\frac{8}{27}=0$$

の根は

$$T=\left(\frac{\pm 10+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)i.$$

$$u=-\frac{(1+\sqrt{3})i}{\sqrt{3}}=-\frac{(3+\sqrt{3})i}{3}$$

が

$$\left(\frac{10+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)i$$

の 3 乗根の一つである.

$$v=\frac{-2}{3}\frac{1}{u}=\frac{-2}{3}\left(-\frac{3}{(3+\sqrt{3})i}\right)=-\frac{(3-\sqrt{3})i}{3}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} uv &= \frac{-2}{3}\ , \\ v^3 &= \left(\frac{-10+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)i, \\ u^3+v^3 &= 4i \end{aligned}$$

であり

$$u+v=-\frac{(3+\sqrt{3})i}{3}-\frac{(3-\sqrt{3})i}{3}=-2i$$

が 3 次方程式の根の一つである.

問 2.3. 上の 3 次方程式の残りの 2 根を求めよ.

例 2.4. $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$.
　補助方程式は

$$T^2-\frac{1}{8}+\frac{1}{64}=0.$$

その根は

$$T=\frac{1}{16}(1\pm\sqrt{3}i).$$

それぞれの 3 乗根で積が $-1/4$ となるものを u, v とすると元の 3 次方程式の解は

$$u+v,\ \omega u+\omega^2 u,\ \omega^2+\omega v.$$

ところで，この 3 次方程式は 3 実根

$$\cos 40^\circ,\ \cos 100^\circ,\ \cos 140^\circ$$

を持つことが分かる．しかし，この 3 実根を実数の四則計算とべき乗根のみで表すことは出来ないことも分かっている．

2.2 練習問題

次の方程式を解け．

(1) $x^3+6x^2+3x+2=0.$
(2) $x^3-9x^2+36x-48=0.$
(3) $x^3+3\sqrt{2}x^2=4\sqrt{2}+9.$
(4) $x^3-x-6=0.$
(5) $x^3+9x=34\sqrt{2}.$
(6) $x^3+10x=6x^2+4.$
(7) $x^3+21x=9x^2+5.$
(8) $x^3-9x+2\sqrt{2}=0.$

* **問．** 次のような 3 次方程式で有理数の根を持たない例を一つづつ作り，根を求めよ．

(1) 3 個の実根を持つ．
(2) 1 個の実根と 2 個の虚根を持つ．