第 4 章　4 次方程式

4.1　フェラリの解法

4 次方程式の一般形として主に次の形を考える．

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{4.1}$$

問 4.1. 式の変形のみでは，次の形であって (1.1) と同値な方程式を得ることは出来ないことを示せ．

$$(x \text{ の 1 次式})^4 = \text{定数}$$

(1.1) は変数変換 $y = x + a/4$ によって 3 乗の項が現れない次の型の方程式に帰着される．

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \tag{4.2}$$

ここで p, q, r は，

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

とおくとき

$$\begin{aligned} r &= f(-a/4), \\ q &= f'(-a/4), \\ p &= \frac{f''(-a/4)}{2}. \end{aligned}$$

例 4.1. 次の方程式

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 7 = 0$$

は変数変換で

$$y^4 + 2y^2 - 4y + 8 = 0$$

に帰着される．

フェラリの解法のアイデアは (1.2) を

$$(2\text{ 次式})^2 = (1\text{ 次式})^2$$

の形に変形することであるので，そのために次の補題を復習しておく．

補題 4.1. A, B, C が定数であるとき，X の多項式 Ax^2+BX+C が完全平方，すなわち

$$AX^2+BX+C = (X\text{ の多項式})^2$$

と表わされるためには $B^2-4AC=0$ であることが必要十分．

(1.2) を

$$y^4 = -py^2 - qy - r,$$

と変形し，両辺に $ty^2+t^2/4$ を加えると

$$\left(y^2+\frac{t}{2}\right)^2 = (t-p)y^2 - qy + \left(\frac{t^2}{4}-r\right). \tag{4.3}$$

上の式の右辺が $(y\text{ の式})^2$ となるための条件は，補題 1.1 より

$$q^2 - 4(t-p)\left(\frac{t^2}{4}-r\right) = 0. \tag{4.4}$$

これを t について整理した

$$t^3 - pt^2 - 4rt + 4pr - q^2 = 0. \tag{4.5}$$

を (1.2) の **3 次分解方程式**と言う．

(1.5) が $t=p$ を根に持たないとき，(1.5) の根の一つを t_0 とし，t_0-p の平方根の一つを $\sqrt{t_0-p}$ と表わして (1.3) に適用すると，

$$\left(y^2+\frac{t_0}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{t_0-p}y - \frac{q}{2\sqrt{t_0-p}}\right)^2$$

が得られるから

$$\begin{aligned} y^2+\frac{t_0}{2} &= \sqrt{t_0-p}y - \frac{q}{2\sqrt{t_0-p}}, \\ y^2+\frac{t_0}{2} &= -\left(\sqrt{t_0-p}y - \frac{q}{2\sqrt{t_0-p}}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

の二つの 2 次方程式を解けば (1.2) の 4 根が得られる．

(1.5) が $t=p$ を根に持てば[*1] $q=0$ であるから (1.2) は

$$y^4+py^2+r=0$$

となり，

$$Y^2+pY+r=0$$

の根 Y_1，Y_2 に対して

$$y^2=Y_1 \text{ または } y^2=Y_2$$

をみたす 4 個の y が (1.2) の根となる．

例 4.2. 次の方程式をフェラリの解法で解く．

$$y^4+2y^2-4y+8=0.$$

3 次分解方程式

$$t^3-2t^2-32t+48=0$$

は $t=6$ を根の一つに持つから[*2]

$$(y^2+3)^2=4y^2+4y+1=(2y+1)^2$$

を解いて $y=1\pm i$，$-1\pm\sqrt{3}i$ が得られる．

なお，3 次分解方程式の根は元の方程式を解くために使いやすいものを一つ求めれば良いことを注意しておく．

例 4.3.

$$x^4+4x^3+4x^2+1=0$$

をフェラリの解法で解く．変数変換して 3 次の項が現れない形にすると

$$y^4-2y^2+2=0$$

が得られる．したがって $1+i$ と $1-i$ のそれぞれの平方根の一方を $\sqrt{1+i}$ と $\sqrt{1-i}$ で表わせば，$y^4-2y^2+2=0$ の 4 根は

$$y=\pm\sqrt{1+i},\ \pm\sqrt{1-i}$$

[*1] この場合も，形式的には (1.3) が完全平方となり上と同様にして 4 根を得ることができるが，以下の方法による方が簡単である．

[*2] この方程式を解くには，定数項 48 の約数を試していく方法の方がカルダノの解法より簡単である．

である．なお，$\pm\sqrt{1+i}$ は

$$\pm\left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}\right)$$

と表わすことも出来る．

問 4.2. 例 (1.3) の残りの 2 根を

$$a+bi\ (a,b \text{ は実数})$$

の形に表わせ．

4.2　練習問題

次の方程式を解け．

(1) $x^4-5x^2+6x+3=0.$
(2) $x^4+8x^3+25x^3+40x+25=0.$
(3) $x^4-8x^3+21x^2-16x-7=0.$
(4) $x^4+16x^3+94x^2+248x+253=0.$
(5) $x^4-2x^2-32x-63=0.$

* **問.** 有理数の解を持たない 4 次方程式で次の条件をみたす例を一つづつ作り，フェラリの解法で根を求めよ．

(1) 4 個の実根を持つ．
(2) 2 個の実根と 2 個の虚根を持つ．