第 5 章　数体

5.1　定義

定義 5.1. 複素数の集合 F で次の条件をみたすものを**数体**と言う．

(1) F には 0 でない数が 1 個は元として含まれる．
(2) x, y が F の元であればその和・差・積・商も F の元である．ただし，商で 0 で割ることは考えない．

$$x, y \in F \Rightarrow x+y,\ x-y,\ xy,\ x/y \in F\ (x/y \text{ では } y \neq 0 \text{ とする}).$$

以下では，数体を単に体[*1]と言うこともある．

例 5.1. 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$，実数全体の集合 $\mathbb{R}$，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ はいずれも数体である．それぞれ，**有理数体**，**実数体**，**複素数体**と言う．
自然数全体の集合 $\mathbb{N}$，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ はどちらもも数体ではない．

例 5.2. 次の集合 F は数体である．

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \text{有理数 } a,\, b \text{ によって } a + b\sqrt{2} \text{ と表わされる数全体}.$$

問 5.1.

$$F = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \text{有理数 } a,\, b \text{ によって } a + bi \text{ と表わされる数全体}.$$

とすると F は数体であることを示せ．ただし，i は虚数単位（$\sqrt{-1}$）．

命題 5.1. F が数体であれば F は全ての有理数を含む：$F \supset \mathbb{Q}$.

5.2　体の拡大

定義 5.2. F_1，F_2 が数体で，集合として $F_1 \subset F_2$ であるとき，F_1 は F_2 の**部分体**であると言う．また F_2 は F_1 の**拡大体**であると言う．

[*1] 体には，数体以外にも有理式のなす体や有限体などがある．

例 5.3. $\mathbb{Q}$ は全ての数体の部分体であり（命題 8.1），$\mathbb{C}$ は全ての数体の拡大体である．

例 8.2 の F は $\mathbb{R}$ の部分体である．

問 8.1 の F は $\mathbb{R}$ の部分体ではない．

定義 5.3. F を数体，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を複素数とする．F の元と $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ から加減乗除で得られる数全体の集合は F の拡大体になる．これを，F に $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を**添加**した数体と言い

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

で表わす．$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は F の拡大体で $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を含むものの中で（集合として）最小の数体である．

註. $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は，次のように F から始めて数を 1 個づつ添加することを繰返して得られる数体でもある．

$$F \subset F(\alpha_1) \subset (F(\alpha_1))(\alpha_2) \subset \cdots \subset ((\cdots(F(\alpha_1))(\alpha_2)\cdots)(\alpha_n) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

命題 5.2. 記号は定義 8.3 と同じとする．$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は F の元を係数とする $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の分数式全体の集合と一致する．

特に $n = 1$ のとき，$\alpha = \alpha_1$ とすると $F(\alpha)$ は次の形の数全体の集合と一致する．

$$\frac{a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0}{b_n\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0}.$$

ただし，m, n は非負整数，$a_m, \ldots, a_0, b_n \ldots, b_0$ は F の元で，分母は 0 でないとする．

例 5.4.

$$\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}.$$

例 5.5. 有理数体 $\mathbb{Q}$ に $\sqrt{2}$ を添加した体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は例 8.2 の F と一致する．

問 5.2. 有理数体 $\mathbb{Q}$ に $i = \sqrt{-1}$ を添加した体 $\mathbb{Q}(i)$ は問 8.1 の F と一致することを示せ．

問 5.3. ω を 1 の虚数 3 乗根とする．$\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ を示せ．

例 5.6. 円周率 π はどのような有理数係数の方程式の根にもならないことが知られている．すなわち，有理数 $a_m, \ldots, a_0$ に対して

$$a_m\pi^m + a_{m-1}\pi^{m-1} + \cdots + a_1\pi + a_0 = 0$$

が成立するのは

$$a_m = a_{m-1} = \cdots = a_0 = 0$$

のときに限る．このことから，$\mathbb{Q}(\pi)$ は有理数係数の π の分数式

$$\frac{a_m\pi^m + a_{m-1}\pi^{m-1} + \cdots + a_1\pi + a_0}{b_n\pi^n + b_{n-1}\pi^{n-1} + \cdots + b_1\pi + b_0}$$

全体の集合に一致することが分かる．

一般に $F(\alpha)$ の元がどのように表わされるかは，α を根とする F 係数の方程式によって決まることが知られている．

5.3　方程式と体

5.3.1　1 次方程式

1 次方程式

$$ax + b = 0 \ (a \neq 0). \tag{5.1}$$

に対して，有理数体に係数 a, b を添加した数体

$$F = \mathbb{Q}(a, b)$$

を考えると

$$x = -\frac{b}{a} \in F.$$

すなわち，(8.1) の解は有理数体に係数 a, b を添加した数体の数である．

5.3.2　2 次方程式

2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0). \tag{5.2}$$

に対して，有理数体に係数 a, b, c を添加した数体

$$F = \mathbb{Q}(a, b, c)$$

を考える．F の元である $\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}$ について

$$X^2 - \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = 0$$

の解，すなわち平方根の一つを α とし，

$$K = F(\alpha)$$

とおくと，(8.2) の 2 根は K の元である（2 次方程式の根の公式）．

なお，(8.2) の 2 根を得るために F に添加する数には色々な可能性がある (問 8.4 参照)．

また，個別の方程式に対しては $K = F$ の場合もあり得る．以下でも，実際には体の拡大（数の添加）は不要な場合がある．

問 5.4. 上で，$b^2 - 4ac$ の平方根の一つを α' として，F に添加した体を K' とする：$K' = F(\alpha')$．このとき $K' = K$ であることをを示せ．

5.3.3　3 次方程式

カルダノの解法を数体への数の添加の視点で考える．

3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0) \tag{5.3}$$

に対して，有理数体 $\mathbb{Q}$ に a, b, c, d を添加した数体を F とおく：$F = \mathbb{Q}(a, b, c, d)$.

(8.3) から変数変換 $y = x + \dfrac{b}{3a}$ によって得られる次の方程式を考える．

$$y^3 + py + q = 0 \tag{5.4}$$

このとき $p, q \in F$.

$p = q = 0$ であれば (8.3) の根は $-b/(3a)$ のみ（3 重根）で，F の元である．

$(p, q) \neq (0, 0)$ のときを考える．

F の元である $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ について

$$X^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

の根の一つを α として，これを F に添加した数体を K とする：$K = F(\alpha)$.

補助方程式 $T^2 + qT - \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 = 0$ の 2 根 t_1, t_2 は K の元で，少なくとも一方は 0 でない．$t_1 \neq 0$ とする．

$$Y^3 = t_1$$

の根の一つを β とし（$\beta \neq 0$），$L = K(\beta)$ とおく．

$$\beta + \frac{\frac{-p}{3}}{\beta}$$

は L の元であって，(8.3) の根の一つである．

さらに，1 の虚数 3 乗根 ω を L に添加し $M = L(\omega)$ とすると，M は (8.3) の 3 根を含む数体である．

問 5.5. 上の記号で，β_1, β_2 の一方が 0 であれば $\alpha \in F$ であって，α の添加は不要であることを示せ．この場合，(8.3) は次のようになり，3 乗根 + 1 次方程式で解かれる．

$$a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{27a^2d - b^3}{27a^2} = 0.$$

5.3.4　4 次方程式

フェラリの解法を数体への数の添加の視点で考える．

4 次方程式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \ (a \neq 0) \tag{5.5}$$

に対して，有理数体 $\mathbb{Q}$ に a, b, c, d, e を添加した数体を F_0 とおく：$F_0 = \mathbb{Q}(a, b, c, d, e)$.

3 次分解方程式は，係数が F_0 の元であるから，F_0 を基礎になる数体として前項と同様に数の添加を行なえば根が得られる．

F_0 の元の平方根を添加 $\to F_1 \ni$ 3 次分解方程式の補助方程式の 2 根.

F_1 の元の 3 乗根を添加 $\to F_2 \ni$ 3 次分解方程式の 1 根.

F_2 の元の平方根を添加 $\to F_3$係数の 2 次方程式 2 個に帰着.

F_3 元の平方根を添加 $\to F_4 \ni$ (8.5) の根.

5.3.5　べき根による解法

代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0 \tag{$*$}$$

を**ベキ根によって解く**とは，係数を含む最小の数体 $\mathbb{Q}(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$ から始めて，数体の元のべき根を添加した拡大体を作ることを繰り返して，$(*)$ の根を含む数体を作ることである．正確に言うと，数体の列

$$F_0 = \mathbb{Q}(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r = F$$

で

$$F_i = F_{i-1}(\alpha_i),\ \alpha_i \text{は}\ t^{n_i} = c_i \text{の根},\ c_i \in F_{i-1}$$

であり，F が $(*)$ の根を含むものを求めることである．

4 次以下の方程式にはベキ根による解法が存在する．

$\mathcal{MEMO}$