第 8 章　置換の群

8.1　n 次対称群

定義 8.1. 1 から n までの自然数全体の集合を $I_n = \{1, \ldots, n\}$ とする．I_n から I_n への全単射全体が写像の合成についてなす群を n 次**対称群**と言い，S_n で表わす．S_n の元を（n 次の）**置換**と言う．

I_n の恒等写像，すなわち全ての $i = 1, \ldots, n$ に対して $\sigma(i) = i$ である置換を**単位置換**または恒等置換と言い，e で表わす．e は群 S_n の単位元である．

S_n の元 σ は

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

のように表わすことができる．これは，$1, \ldots, i, \ldots, n$ を横に並べて書き，各 i の下に $\sigma(i)$ を書いて，括弧で括る表わし方である．この表わし方で，上の行は $1, \ldots, i, \ldots, n$ の順に書かなくても良い．また，$\sigma(i) = i$ である i は省略しても良い．

例 8.1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\sigma \in S_5$ であるが，$\sigma(6) = 6$ と考えて $\sigma \in S_6$ と見なすこともできる．

一般に，$n \leq m$ であれば $S_n \subset S_m$ と見なすことができる．

問 8.1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

に対して

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \\ 1 & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix}$$

であることを示せ．

定義 8.2. S_n の元 σ が次の条件をみたすとき**長さ** m の**巡回置換**であると言う．

(1) m 個の異なる数 i_1, …, i_m について

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_{m-1}) = i_m, \sigma(i_m) = i_1.$$

(2) i_1, …, i_m 以外の数 i については $\sigma(i) = i$.

このとき，σ を

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_m \end{pmatrix}$$

とも表わす．特に，長さ 2 の巡回置換を**互換**と言う．

命題 8.1. (1) 任意の置換は巡回置換の積で表わされる．
(2) 任意の巡回置換は互換の積で表わされる．

定理 8.2. 任意の置換は互換の積で表わされる．

例 8.2.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定理 8.3. 置換を互換の積で表わしたとき，積に現れる互換の個数の偶奇は積での表わし方によらず一定である．

定義 8.3. 偶数個の互換の積で表わされる置換を**偶置換**，奇数個の互換の積で表わされる置換を**奇置換**と言う．

定理 8.4. S_n の偶置換全体の集合は S_n の部分群をなす．これを n 次**交代群**といい，A_n で表わす．

命題 8.5 (あみだくじの原理)**.** S_n の任意の元は次の $n-1$ 個の互換の積で表わされる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n-1 & n \end{pmatrix}.$$

命題 8.6. S_n の任意の元は一つの数と他の $n-1$ 個の数の組合せできる $n-1$ 個の互換の積で表わされる．

例 8.3. S_n の任意の元は次の $n-1$ 個の互換の積で表わされる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & n \end{pmatrix}.$$

8.2 変数の置換

定義 8.4. $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ を n 変数の関数，σ を S_n の置換とする．関数

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

を，$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ に σ を**作用**させた関数，または $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ に σ を**施した**関数と言い，σf あるいは

$$(\sigma f)(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$$

で表わす．

例 8.4. (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_2+3x_3$，$\sigma=(1\ 2\ 3)$ について

$$(\sigma f)(x_1,x_2,x_3)=x_2+2x_3+3x_1=3x_1+x_2+2x_3.$$

(2) $g(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2$，$\sigma=(1\ 2)$ について

$$(\sigma g)(x_1,x_2)=g(x_1,x_2).$$

命題 8.7. f, g を n 変数の関数，$\sigma,\tau\in S_n$ とする．

(1) $\sigma(\tau f)=(\sigma\tau)f$.
(2) $f=\sigma g\Leftrightarrow\sigma^{-1}f=g$.
(3) $\sigma(f\pm g)=\sigma f\pm\sigma g$.
(4) $\sigma(fg)=(\sigma f)(\sigma g)$.
(5) $\sigma(f/g)=(\sigma f)/(\sigma g)$.

定理 8.8. n 変数の関数 f について，S_n の元で f を変えないもの全体を

$$G=\{\sigma\in S_n\mid\sigma f=f\}$$

とする．また，f に S_n の置換を作用させると，全部で l 個の相異なる関数

$$f=f_1,f_2,\ldots,f_l$$

が得られるとし，各 f_i に対して

$$\sigma_i f=f_i$$

となる $\sigma_i\in S_n$ をとる[*1]（$1\leq i\leq i$)．

(1) G は S_n の部分群をなす．
(2) $\sigma\in S_n$ について，

$$\sigma f=f_i\Leftrightarrow\sigma\in\sigma_iG=\{\sigma_i\tau\mid\tau\in G\}.$$

(3) $l(=f$ に S_nの元を作用させてできる相異なる関数の個数) は $n!$ の約数である．

例 8.5. (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+\omega x_2+\omega^2x_3$ とする（ω は 1 の虚数 3 乗根)．f に S_3 の元を作用させてできる多項式は 6 個である．

[*1] $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_l\}$ は剰余類集合 S_n/G の代表系である．

(2) $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$ とする．g に S_3 の元を作用させてできる多項式は 3 個である．

(3) $D(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ とする．D に S_3 の元を作用させてできる相異なる多項式は 2 個である．

(4) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2x_3 + x_2x_3^2x_1 + x_3x_1^2x_2$ とする．h に S_3 の元を作用させてできる多項式は h のみである．

問 8.2. 例 8.5 の g と D について次の群を求めよ．

$$G_1 = \{\sigma \in S_3 \mid {}^{\sigma}g = g\}.$$
$$G_2 = \{\sigma \in S_3 \mid {}^{\sigma}D = D\}.$$

8.3　対称式

定義 8.5. n 変数の有理式 $f(x_1, \dots, x_n)$ が**対称式**であるとは S_n の任意の元 σ に対して $f(x_1, \dots, x_n)$ が不変，すなわち

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

が成立することである．

例 8.6. (1) $x_1^k + x_2^k + x_3^k$ は 3 変数の対称式である．

(2) $(x_1 + x_2)/(x_1x_2)$ は 2 変数の対称式である．

(3) $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ は対称式でない．

命題 8.9. n 変数の有理式 f について，次は同値．

(1) f は対称式．

(2) S_n の全ての互換で f は不変．

(3) $n-1$ 個の互換 $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1, n)$ で f は不変．

(4) 1 から n までの一つの数と他の $n-1$ 個の数の組み合わせでできる $n-1$ 個の互換で f は不変．

例 8.7. 有理式 $f(x_1, \dots, x_n)$ が次をみたせば対称式である．

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) = \cdots = f(x_i, x_2, \dots, x_1, \dots, x_n) = f(x_n, x_2, \dots, x_1).$$

定義 8.6. n 個の変数 $x_1, \dots, x_n$ と $1 \le k \le n$ である自然数 k に対して，$x_1, \dots, x_n$ の中の k 個を選んでできる積全体の和を s_k とおく．

$$s_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

$s_1, \dots, s_n$ はいずれも対称式であり，これらを n 次**基本対称式**と言う．

例 8.8. $n=4$ のときは

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1+x_2+x_3+x_4, \\ s_2 &= x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_3+x_3x_4, \\ s_3 &= x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4, \\ s_4 &= x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

問 8.3. 5 次の基本対称式 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 を求めよ.

定理 8.10. n 変数の多項式 $f(x_1,\dots,x_n)$ が対称式であれば，基本対称式 $s_1,\dots,s_n$ の多項式として表わされる.

定理 8.11. n 変数の有理式 $f(x_1,\dots,x_n)$ が対称式であれば，基本対称式 $s_1,\dots,s_n$ の有理式として表わされる.

多項式の多重次数

定義 8.7. n 変数の単項式

$$M = x_1^{\alpha_1}\dots x_i^{\alpha_i}\dots x_n^{\alpha_n}$$

に対して

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$$

を m の**多重次数**と言う.

定義 8.8. $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$ と $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_i,\dots,\beta_n)$ を n 個の整数の組とする．α が β より**小さい**[*2] ことを，ある i について次が成立することと定義する.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 \\ \alpha_2 &= \beta_2 \\ &\cdots\cdots \\ \alpha_i &= \beta_i \\ \alpha_{i+1} &< \beta_{i+1}. \end{aligned}$$

このことを，通常の不等号を使って

$$\alpha < \beta$$

と表わす．このとき，β は α より大きいとも言い，$\beta > \alpha$ とも表わす．$\alpha < \beta$ または $\alpha = \beta$ であることを $\alpha \le \beta$ で表わす.

例 8.9. (1) $n=2$ とする．$(2,0)>(1,5)$, $(3,1)<(3,2)$

[*2] これは辞書式順序の一例である

(2) $n=3$ とする．$(3,0,1)>(2,10,0)$, $(1,2,5)>(1,1,7)$, $(2,2,3)<(2,2,4)$

命題 8.12. $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$ と $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_i,\dots,\beta_n)$ について，次の一つだけが必ず成立する．

(1) $\alpha>\beta$.
(2) $\alpha=\beta$.
(3) $\alpha<\beta$.

註. 上のような順序は項数が同じ組についてのみ考える．例えば，$(1,2)$ と $(1,2,3)$ の大小は考えない．

命題 8.13. 整数の組 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\dots,\beta_i,\dots,\beta_n)$，$\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_i,\dots,\gamma_n)$ について，

$$\alpha<\beta\Rightarrow\alpha+\gamma<\beta+\gamma.$$

命題 8.14. (1) 単項式 $L=x_1^{\alpha_1}\dots x_i^{\alpha_i}\dots x_n^{\alpha_n}$ と $M=x_1^{\beta_1}\dots x_i^{\beta_i}\dots x_n^{\beta_n}$ について，積 LM の多重次数は

$$(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_i+\beta_i,\dots,\alpha_n+\beta_n).$$

(2) n 変数の単項式 L, M, N について, M の多重次数 $<N$ の多重次数 であれば,

$$LM \text{ の多重次数} < LN \text{ の多重次数}.$$

定義 8.9. n 変数多項式 $f(x_1,\dots,x_n)$ に現れる単項式の中で多重次数が最大のもの $f(x_,\dots,x_n)$ の**最高次の項**と言う．また，その多重次数を $f(x_,\dots,x_n)$ の多重次数と定義する．

註. 定数の n 変数多項式としての多重次数は $(0,\dots,0)$ である．ただし，0 の多重次数は不定とする．

例 8.10. (1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ の最高次の項は $x_1^2x_2$，多重次数は $(2,1)$.
(2) $x_1x_2^2+x_2^4x_3^2+x_1x_2x_3^3$ の最高次の項は $x_1x_2^2$，多重次数は $(1,2,0)$.
(3) $x_1^3x_3+x_1x_3^2$ の最高次の項は $x_1^3x_3$，多重次数は $(3,0,1)$.

註. 多重次数を考えるときには何変数の式かを考慮する必要がある．上の例の $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ は，3 変数の式（の x_3 が現れない場合）と考えると，多重次数は $(2,1,0)$ である．

命題 8.15. f，g が n 変数多項式であるとき

$$fg \text{ の多重次数} = f \text{ の多重次数} + g \text{ の多重次数}.$$

命題 8.16. n 変数多項式が対称式であれば，その多重次数 $(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$ は次の条件をみたす．

$$\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_i\geq\cdots\geq\alpha_n.$$

例 8.11. n 変数対称多項式を多重次数の低い方から並べると

多重次数	対称式
(0,0,...,0)	定数
(1,0,...,0)	$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
(1,1,0,...,0)	$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$
(1,1,1,0,...,0)	$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$
$\cdots$	$\cdots$
(1,1,...,1, 0)	$x_1x_2\cdots x_{n-1} + \cdots + x_2x_3\cdots x_n$
(1,1,...,1)	$x_1x_2\cdots x_n$
(2,0,...,0)	$x_1^2 + \cdots + x_n^2$
$\cdots$	$\cdots$

定理 8.10 の証明

$f(x_1,\ldots,x_n)$ を対称多項式，その最高次数の項を $cx^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ とする（c は定数）．$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \le (1,1,\ldots,1)$ であれば f は基本対称式の線型結合である（例 8.11 参照）．

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) > (1,1,\ldots,1)$ とし，多重次数が $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ より小さい対称式については正しいと仮定する．

$$cs_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}s_2^{(\alpha_2-\alpha_3)}\cdots s_{n-1}^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}s_n^{\alpha_n}$$

の最高次数の項は f と一致する．

$$g(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n) - cs_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}s_2^{(\alpha_2-\alpha_3)}\cdots s_{n-1}^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}s_n^{\alpha_n}$$

とおくと g は対称式で，その多重次数は $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ より小さい．したがって，帰納法の仮定により基本対称式の多項式である．したがって

$$f(x_1,\ldots,x_n) = cs_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}s_2^{(\alpha_2-\alpha_3)}\cdots s_{n-1}^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}s_n^{\alpha_n} + g(x_1,\ldots,x_n)$$

も基本対称式の多項式である．

例 8.12. つぎの対称式を基本対称式で表わす（36 ページ参照）．

$$F = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 2x_3^3 - 3(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_1 + x_3x_1^2) + 12x_1x_2x_3.$$

F の次数最大の項は $2x_1^3$，多重次数は $(3,0,0)$ であるから

$$F_1 = F - 2(x_1 + x_2 + x_3)^{3-0}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^{0-0}(x_1x_2x_3)^0$$

とすると F_1 の次数最大の項は $-9x_1^2x_2$，多重次数は $(2,1,0)$ である．

$$F_2 = F_1 - (-9)(x_1 + x_2 + x_3)^{2-1}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^{1-0}(x_1x_2x_3)^0$$

とすると

$$F_2 = 27x_1x_2x_3.$$

したがって

$$F = 2s_1^3 - 9s_1s_2 + 27s_3.$$

定理 8.11 の証明

$f = \dfrac{g}{h}$ を n 変数対称有理式とする（g，h は n 変数多項式）．g, h は対称多項式とは限らないが，次のようにして f の分母分子を対称多項式にとることができる．

$S_n = \{e = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$ $(m = n!)$ とすると

$$f = \frac{g\ {}^{\sigma_2}h \cdots {}^{\sigma_m}h}{{}^{\sigma_1}h\ {}^{\sigma_2}h \cdots {}^{\sigma_m}h}$$

であって

$$f\ {}^{\sigma_1}h\ {}^{\sigma_2}h \cdots {}^{\sigma_m}h = g\ {}^{\sigma_2}h \cdots {}^{\sigma_m}h,$$

左辺の f は対称有理式, ${}^{\sigma_1}h\ {}^{\sigma_2}h \cdots {}^{\sigma_m}h$ は対称多項式であるから，右辺も対称多項式である．したがって，f は対称多項式の分数に表わされ，そのとき分母分子はいずれも基本対称式の多項式であるから，f は基本対称式の有理式である．