8.4 有理式と置換

8.4.1 交代式

定義 8.10. n 変数の有理式 $f(x_1,\dots,x_n)$ が**交代式**であるとは，任意の互換 $\sigma=(i\ j)$ $(1\le i<j\le n)$ について次が成立すること．

$$(\sigma f)(x_1,\dots,x_n)=-f(x_1,\dots,x_n).$$

交代式 $f(x_1,\dots,x_n)$ と $\sigma\in S_n$ について次が成立する．

(1) σ が奇置換 $\Rightarrow (\sigma f)(x_1,\dots,x_n)=-f(x_1,\dots,x_n)$.
(2) σ が偶置換 $\Rightarrow (\sigma f)(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)$.

例 8.13. 次の多項式は交代式である．

$$\begin{aligned}\Delta(x_1,\dots,x_n)&=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)\\&\qquad\qquad\times(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\\&\qquad\qquad\qquad\ddots\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\times(x_{n-1}-x_n)\\&=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j).\end{aligned}$$

これを $x_1,\dots,x_n$ の**差積**と言う．

定理 8.17. 有理式 $f(x_1,\dots,x_n)$ が交代式であれば差積と対称式の積に表わされる．

$$f=\Delta F,\ F \text{ は対称式}.$$

定理 8.18. $f(x_1,\dots,x_n)$ が A_n の置換で不変な有理式であれば，対称式と交代式の和に表わされる．

8.4.2 有理式の対称式

定理 8.19. $h(x_1,\dots,x_n)$ を n 変数の有理式とし，h に S_n の置換を作用させてできる相異なる式を

$$h_1=h,\ h_2,\dots,h_l$$

とする．有理式 $\Phi(h_1,h_2,\dots,h_l)$ が $h_1,h_2,\dots,h_l$ の対称式であれば，$x_1,x_2,\dots,x_n$ の式として対称式である．

例 8.14. $h(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_3x_4$ とすると，S_4 の置換で出来る異なる式は次の 3 個．

$$h=h_1=x_1x_2+x_3x_4,\ h_2=x_1x_3+x_2x_4,\ h_3=x_1x_4+x_2x_3.$$

h を変えない置換全体のなす群は

$$G = \{e, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\}.$$

h_1, h_2, h_3 の対称式は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式，特に

$$h_1 + h_2 + h_3,\ h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1,\ h_1h_2h_3$$

は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式である．

x_1, x_2, x_3, x_4 が 4 次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の 4 根であれば，h_1, h_2, h_3 を根とする方程式

$$(T - h_1)(T - h_2)(T - h_3) = 0$$

の係数は a, b, c, d の多項式である．

8.4.3 有理式の有理式

定理 8.20. 2 個の有理式 $f(x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ について，f を変えない S_n の置換は φ も変えないとする．

$$(\sigma f) = f \Rightarrow \sigma\varphi = \varphi.$$

このとき，φ は f の有理式に表わされる．

$$\varphi = \frac{a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0}{b_l f^l + b_{l-1} f^{l-1} + \cdots + b_1 f + b_0}.$$

ここで $a_m, \ldots, a_0, b_l, \ldots, b_0$ は $x_1, \ldots, x_n$ の対称式である．

註. 上の定理で，特に f として S_n の置換で $n!$ 個の異なる式が得られるものを取れば，任意の n 変数有理式 φ が g の有理式として表わされる．

系 8.21. f, φ を n 変数有理式とする．f を変えない S_n の置換全体を G とする：$G = \{\sigma \in S_n \mid \sigma f = f\}$. G の置換を φ に作用させて得られる異なる式全体を $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ とする．このとき，$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ の対称式は f の有理式に表わされる．

例 8.15. x_1, x_2 を方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 根とし，$f(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) = x_1$ とおく．置換 $(1\ 2)$ で f は $f_2 = -f$ に，φ は $\varphi_2 = x_2$ に変わる．

$$F(X) = (X - f_1)(X - f_2),$$
$$G(X) = \varphi_1(X - f_2) + \varphi_2(X - f_1)$$

とすると

$$x_1 = \varphi = \frac{G(f)}{F'(X)} = \frac{-af + a^2 - 4b}{2f} = \frac{-a + f}{2}.$$