第 9 章　根の有理式

9.1　2 次方程式の場合

2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{9.1}$$

に対して $K = \mathbb{Q}(a, b)$ とおく．また，(9.1) の 2 根を x_1, x_2 とする．

K の元を係数とする x_1, x_2 の有理式 $f(x_1, x_2)$ で次の条件をみたすものを求める．

(1) x_1, x_2 が $f(x_1, x_2)$ の K 係数の有理式に表わされる．
(2) $f(x_1, x_2)$ は K の元の平方根である．

このような $f(x_1, x_2)$ は無数に存在するが，ここでは x_1, x_2 の 1 次式

$$c_1x_1 + c_2x_2,\ c_1, c_2 \in K$$

で条件をみたすものを求める．

条件 (1) のためには，S_2 の単位元以外の唯一の元 $\sigma = (1\ 2)$ に対して

$$\sigma f \neq f, \text{すなわち}\ f(x_1, x_2) \neq f(x_2, x_1)$$

であれば良い（定理 8.20 及びその後の註）．そのための条件は $c_1 \neq c_2$ である．

条件 (2) は $f^2 \in K$ を意味するが，K は x_1, x_2 の $\mathbb{Q}$ 係数の対称有理式全体のなす集合であるから，

$$f^2 = c_1^2x_1^2 + 2c_1c_2x_1x_2 + c_2^2x_2$$

が対称式であれば良い．そのための条件は

$$c_1^2 = c_2^2$$

である．$c_1 \neq c_2$ でなければならないから，$c_2 = -c_1$.

$c_1 = 1$, すなわち $f = x_1 - x_2$ ととることができる．このとき

$$f^2 = a^2 - 4b \in K$$

で，x_1 は例 8.15 で見たように f の有理式で表わされ，したがって x_2 も f の有理式で表わされる．

9.2　3 次方程式の場合

3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{9.2}$$

に対して $K = \mathbb{Q}(a, b, c)$，$L = K(\omega) = \mathbb{Q}(a, b, c, \omega)$ とおく（ω は 1 の虚数 3 乗根）．(9.2) の 3 根を x_1, x_2, x_3 とし，x_1, x_2, x_3 の L 係数の有理式 $f(x_1, x_2, x_3)$ で次の条件をみたすものを求める．

(1) x_1, x_2, x_3 が $f(x_1, x_2, x_3)$ の K 係数の有理式に表わされる．

(2) $f(x_1, x_2, x_3)$ は K 係数の 2 次方程式を解くことと 3 乗根を求めることで得られる．

条件 (1) のためには，やはり定理 8.20 及びその後の註から S_3 の 6 個の置換で 6 個の異なる式ができるような f を取れば良い．

条件 (2) は，f に S_3 の置換を施してできる 6 個の式 $f = f_1$, $f_2, \ldots, f_6$ を根とする方程式

$$(t - f_1)(t - f_2) \cdots (t - f_6) = 0$$

が K 係数の方程式で，しかも次の方程式に帰着するものであれば良い．

$$(t^3)^2 + A(t^3) + B = 0,\ (A, B \in K). \tag{9.3}$$

上の条件をみたす f を求める．(9.3) は t^3 について 2 次方程式であるから，その根である $f_1, \ldots, f_6$ の中の 3 個は 3 乗の値が一致する．例えば，$f_1^3 = f_2^3 = f_3^3$.

$f_2 = \sigma f_1$ である $\sigma \in S_3$ をとる．$f_1^3 = f_2^3$ であるから $f_2 = cf_1$, $c^3 = 1$ をみたす定数 c が存在する．$f_1 \neq f_2$ でなければならないから $c \neq 1$，したがって $c = \omega$（1 の虚数 3 乗根）として良い．

$f_2 = \sigma f_1 = \omega f_1$ であるから $\sigma^2 f_1 = \omega^2 f_1$, $(\sigma^2 f_1)^3 = f_1^3$, したがって $f_3 = \sigma^2 f_1$ として良い．

また，σ は長さ 3 の巡回置換でなければならない．σ が互換，例えば $\sigma = (1\ 2)$ とすると，$\sigma^2 = e$ であるから

$$f_1 = \sigma^2 f_1 = \omega^2 f_1.$$

しかし $\omega^2 \neq 1$ であるから矛盾．

したがって $\sigma = (1\ 2\ 3)$ として良い．以下，$f = f_1$ を 1 次式として，上の条件をみたすものを求める．$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$, $c_1, c_2, c_3 \in K$ とおく．

$$\sigma f = c_1 x_2 + c_2 x_3 + c_3 x_1 = \omega c_1 x_1 + \omega c_2 x_2 + \omega c_3 x_3$$

であるから $c_3 = \omega c_1$, $c_2 = \omega c_3 = \omega^2 c_1$. $c_1 = 1$ として

$$f = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$$

が得られる．この f が条件をみたしていることは第 7 章で見たとおりである．

9.3　4 次方程式の場合

4 次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{9.4}$$

に対して $K = \mathbb{Q}(a, b, c, d)$ とおく．(9.4) の 4 根を x_1, x_2, x_3, x_4 ととする．4 次方程式については，2 次または 3 次の場合と少し方針を変えて，x_1, x_2, x_3, x_4 の K 係数の有理式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ で次の条件をみたすものをまず求める．

(1) S_4 の置換で $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を変えないもの全体のなす群を G とするとき，G の置換で x_1 と x_2 は x_1 または x_2 に移る．
(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ は K 係数の 3 次方程式を解くことで得られる．

S_4 の置換 σ で

「${}^{\sigma}x_1 = x_1$または x_2」 かつ 「${}^{\sigma}x_2 = x_1$または x_2」

をみたすものは e, $(1\ 2)$, $(3\ 4)$, $(1\ 2)(3\ 4)$ の 4 個で，これらは群をなす．

$$G = \{e,\ (1\ 2),\ (3\ 4),\ (1\ 2)(3\ 4)\}$$

とおく．x_1, x_2, x_3, x_4 の 1 次式 $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ が G の置換で変わらない条件を求めると，$c_1 = c_2$ かつ $c_3 = c_4$ であれば良いことが分かる．今の場合，対称式は不適であるから $c_1 \neq c_3$ でなければならない．

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a(x_1 + x_2) + b(x_3 + x_4),\ a \neq b$$

とおく．f に S_4 の置換を行なって得られる相異なる式は次の 6 個である（a, b は定数）．

$$\begin{aligned}
f = f_1 &= a(x_1 + x_2) + b(x_3 + x_4),\\
f_2 &= a(x_1 + x_3) + b(x_2 + x_4),\\
f_3 &= a(x_1 + x_4) + b(x_2 + x_3),\\
f_4 &= a(x_2 + x_3) + b(x_1 + x_4),\\
f_5 &= a(x_2 + x_4) + b(x_1 + x_3),\\
f_6 &= a(x_3 + x_4) + b(x_1 + x_2).
\end{aligned}$$

$f_1, \ldots, f_6$ を根とする方程式を考える．

$$(t - f_1)(t - f_2)(t - f_3)(t - f_4)(t - f_5)(t - f_6) = 0. \tag{9.5}$$

この方程式の係数は $f_1, \ldots, f_6$ の対称式であるから x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式である（定理 8.19）．a, b の値を適当に選ぶと，(9.5) を次の方程式に帰着させ，しかも fgh が x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式であるようにできる．

$$(t^2 - f^2)(t^2 - g^2)(t^2 - h^2) = 0. \tag{9.6}$$

問 9.1. $a=1$, $b=-1$ とすれば上の状況が実現できることを示せ．

$f=(x_1+x_2)-(x_3+x_4)$ とおく．f に S_4 の置換を行なってできる式は次の 6 個である．

$$\begin{aligned} f &= (x_1+x_2)-(x_3+x_4), \\ -f &= -(x_1+x_2)+(x_3+x_4), \\ g &= (x_1+x_3)-(x_2+x_4), \\ -g &= -(x_1+x_3)+(x_2+x_4), \\ h &= (x_1+x_4)-(x_2+x_3), \\ -h &= -(x_1+x_4)+(x_2+x_3). \end{aligned}$$

問 9.2.　(1) fgh が x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式であることを示せ．
(2) $fgh=(-a)^3-8(-a)b+6(-c)$ を示せ．

f^2, g^2, h^2 は次の方程式の根として得られる（係数が x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式であることに注意）．

$$(T-f^2)(T-g^2)(T-h^2)=0. \tag{9.7}$$

この方程式の 3 根の平方根 t_1, t_2, t_3 で積 $t_1t_2t_3$ が問 9.2 で求めた値と一致するものをとると，次の連立 1 次方程式ができる．

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-a \\ x_1+x_2-x_3-x_4=t_1 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=t_2 \\ x_1-x_2-x_3+x_4=t_3 \end{cases}$$

これを解いて，(9.4) の 4 根が得られる．すなわち，4 次方程式は次の順で解くことができる．

(1) 3 次方程式を解く．
(2) 3 次方程式の根の平方根を求める．
(3) 連立 1 次方程式を解く．